Metode fractale folosite pentru studierea proceselor economice

Ec. Elena ZERFUS

În cadrul articolului voi încerca sa pun în lumina legatura între fractali si domeniul economic. Mai exact între fractali si procese economice considerate pâna nu demult ca fiind aleatoare (urmarind o lege de distributie Gauss). Scopul acestei legaturi este de a clarifica o noua viziune asupra conceptelor de ordonat, haotic, aleator. Acesti trei termeni stau la baza tuturor teoriilor fractale, influentând concluziile analizelor bazate pe aceste teorii.
Cuvinte cheie: *fractali, procese aleatoare, haos.*

1. Introducere

Sa ne imaginam o întreprindere, iar în ea o anumita sala cu mai multe posturi (birouri). La fiecare post este câte un functionar, care trebuie sa lucreze trei dosare pe zi. Cum decurg lucrurile într-un astfel de sistem?

O parte din functionari nu se vor apuca de lucru imediat, iar dosarele se vor strânge pe birou. Cei care au mai multe de lucrat, vor încerca sa le plaseze în dreapta sau în stânga, pentru a-si elibera birourile si pentru a face fata noilor dosare care vin. Cei care primesc de la colegi evident ca se vor încarca si ei încercând la rândul lor sa scape de încarcatura.

Apare astfel o avalansa de dosare, iar la prima vedere sistemul pare ca s-a dereglat total si ca s-a instalat haosul (mai ales ca apar dosare care ies pe fereastra).

Daca ne uitam însa la ceea ce iese din sistem, vom observa ca intervalele de timp de succesiune a dosarelor, cresc în timp dupa o lege de putere. Aceasta înseamna ca de fapt sistemul se afla într-o stare de reorganizare.

Concluzia: Haosul nu înseamna altceva decât o stare de reorganizare a unui sistem.

Sistemul exemplu dat mai sus are multe caraceristici ale celor reale si putem distinge la el trei stadii: acumularea, saturatia, reorganizarea sau haosul. Aceste trei stadii se repeta în timp si compun de fapt un nivel de echilibru al sistemului.

2. Proprietati ale fractalilor

Metoda de analiza se bazeaza pe proprietatile fractalilor si anume:

- **fragmentare la infinit** (o infinitate de elemente componente)
- **autosimilaritate** care este definita în teoria fractalilor ca fiind proprietatea unui obiect de a avea orice detaliu al întregului sau asemanator cu acesta la orice scara.
- **invarianta la translatii -** reprezinta proprietatea unui obiect fractal, de a regasii un detaliu al sau, prin suprapunerea acestuia peste o alta zona a fractalului dupa translatarea pe o anumita directie.
- **dimensiune fractionara** sau “dimensiune fractala” sau “dimensiune de autosimilaritate”.

3. Metode de calcul

a) **metoda clasica** folosita în cazul fractalilor liniari unde :

$$D=\ln N2/\ln N1 \qquad (1)$$

iar N2 reprezinta numarul de replici obtinute prin similaritate pornind de la N1 obiecte initiale:

b)**metoda “Sand box” sau metoda cutiei cu nisip** [4] folosita în general pentru fractali oarecare.

Se alege un prim punct (pozitie amplasament) al fractalului ca origine a n cercuri cu raze $R_1 < R_2 <\ldots < R_n$ unde R_n mai mica decît raza R a fractalului, apoi se numara cîte puncte (pixeli) $M_1(R_i)$ din fiecare cerc i (uneori este mult mai usor sa se aleaga n patrate de laturi L_1, L_2, ... L_n în loc de cercuri).

Repetam aceasta procedura, alegînd alte puncte ca origine a n cercuri si determinam

numarul corespunzator de puncte $M_j(R_I)$ j=2, 3, .., m în fiecare cerc.
Calculam media numerelor $M(R_i)$ astfel:

$$M(R_i)=\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} Mj(Ri) \qquad (2)$$

Se determina punctele $M(R_i)$ dependente de R_i într-o functie logaritmica.
Panta dreptei de regresie, pentru mai multe valori ale lui R_i determina dimensiunea fractala. Pentru a se evita anumite efecte de granita trebuie ca razele cercurilor sa se aleaga mai mici decît raza fractalului.
c) **metoda "Box counting" sau metoda casutelor numarate** [4]
Se deseneaza o retea de linii pe fractal care constau din M_1^2 patrate si determinam numarul patratelor de care este nevoie pentru a fi acoperit fractalul, dupa care alegem o retea mai fina cu $M_2^2 > M_1^2$ si tot asa mai departe se alege $M_m^2 > M_{m-1}^2 .... > M_2^2 > M_1^2$, iar la fiecare pas se calculeaza numarul de patrate necesare pentru a fi acoperit fractalul. Notam numarul de patrate respectiv $S(M_1)...S(M_m)$, dupa care se face aproximarea dupa o functie putere $S(M) \cong N^{-df}$ (unde df reprezinta dimensiunea fractala). Determinând S(M) în functie de 1/M într-o functie logaritmica dubla vom obtine prin panta pe df.
Pentru a fi înbunatatita valoarea lui df se pot face prelucrari statistice pentru mai multe realizari (generari) ale fractalului.

4. Metode de analiza ale seriilor de timp

Miscarea Browniana fractala [8]
Robert Brown a fost primul care a observat miscarea aleatoare a particolelor de polen. Brown, în urma studiilor facute ajunge la concluzia ca moleculele, macromoleculele, virusii, precum si alte particule sunt supuse fluctuatiilor termice (se afla în continua miscare ciocnindu-se aleator datorita energiei termice pe care o poseda).
Miscarea unei particule vazuta la microscop este alcatuita aparent din pasi efectuati în directii diferite. Fiecare pas având o lungime caracteristica. Crescând rezolutia microscopului si pe cea temporala se observa o miscare similara. Dupa cum se cunoaste, în miscarea Browniana, distanta parcursa de o particula într-un interval de timp este independenta de deplasarea ei într-un alt interval de timp.
Mandelbrot a fost primul care a observat posibilitatea folosirii miscarii Browniene în studiul "miscarilor" din alte domenii (exemplu: evolutia valorii la bursa a unui titlu sau evolutia unei valute). Mandelbrot introduce notiunea de miscare fractala ca o generalizare a miscarii Browniene. Functia miscarii Browniene este:
se considera un proces aleator Gaussian, normat cu probabilitatea p si deplasarea particulei dat de ecuatia:

$$|X(t)-X(t_0)| \cong p|t_0-t|^H \qquad (3)$$

unde cu H s-a notat exponentul Hurst.
Pentru orice momente t si t_0 si H=1/2 avem o miscare Browniana normala iar pentru $H \in (0,1) \setminus \{1/2\}$ avem o miscare Browniana fractala. Folosind ecuatia (3), putem deduce pentru variabilele miscarii fractale media nula $\overline{X}_f(t)=0$. Diferenta între cele doua miscari este aceea ca miscarea Browniana fractala prezinta corelatii la o scara infinit de lunga.
Putem defini functia de corelare între cresterile $X_f(t)$ de la momentele viitoare de timp si cresterile $-X_f(-t)$ de la momentele anterioare de timp:

$$C(t)=-X_f(-t) \bullet X_f(t)/X_f(t)^2 = 2^{2H-1} \qquad (4)$$

De aici sunt trase concluziile:
1.Pentru H=1/2 C(t)=0 pentru orice t, deci nu exista nici o corelatie în aceste procese.
2.Pentru $H \neq 1/2$ $C(t) \neq 0$ dar functia de corelatie este independenta de timp. Aceasta proprietate conduce la doua cazuri particulare:
a) H>1/2 apare persistenta. În acest caz existenta unei tendinte crescatoare la un moment anterior de timp implica o tendinta crescatoare la un moment de timp viitor pentru timpi oricât de mari si invers.
b)H<1/2 apare antipersistenta, caracteristica sistemelor cu auto-reglare. În acest caz, o directie crescatoare la un anumit moment

anterior implica o tendinta descrescatoare la un moment viitor si invers.

Analiza domemeniului rescalat (sau analiza R/S) (descrisa în detaliu în “Long-Term Storage: An Experimental Study“ - Hurst 1965)
Mandelbrot (1972) a aratat ca analiza R/S este în general un test de dependenta în timp pentru serii pe perioade foarte lungi.
Având un proces aleator X(t) definim semnalul seriei numerice:

$$X^*(t) = \int_0^t X(u)du \qquad (5)$$

Impartind semnalul în domenii de latura d, se calculeaza pentru acest d R astfel:

$$R=R_p(t,d)=\max_{0<=u<=d}\{X^*(t+u)-X^*(t)-u<X(t+u)>\] \qquad (6)$$

unde:

$$<X(t)>= \frac{\int_t^{t+d} X(u)du}{d} \qquad (7)$$

Metoda R/S se bazeaza pe calcularea unui raport R/S unde R este $R_p(t,d)$ iar S este abaterea standard a seriei X(t) pe subseria de latura d deci S(t,d).
Pentru a utiliza o astfel de statistica pentru serii de timp care sunt discrete {X(1), X(2), X(3), ..., X(T)} se aproximeaza media pe domeniul d si rezulta:

$$R=R_p(t,d)=\max\{X^*(t+u)-X^*(t)-(u/d)[X^*(t+d)-X^*(t)]\}-\min\{X^*(t+u-X^*(T)-(u/d)[X^*(t+d)-X^*(t)]\} \qquad (8)$$

Unde: $X^*(t)= \sum_1^t X(u)$.

O înlocuire similara pentru abaterea standard partiala conduce la :

$$S^2(t,d)= \frac{1}{d}\sum_{u=1}^{d}\{X(t+u)-\frac{1}{d}[X^*(t+d)-X^*(t)]\}^2 \qquad (9)$$

Daca d=1 R(t,1)=S(t,1)=0 si R/S este nedeterminat iar daca d=2, atunci R(t,2)/S(t,2)=2 din acest motiv se alege în general d≥3.[4]
Hurst a descoperit faptul ca R/S depinde de d într-o lege de putere astfel:

$$R/S \cong d^H \qquad (10)$$

H este estimat prin intermediul metodei celor mai mici patrate:

$$\log(R_d/S_d)=\alpha+\beta\log(n)+\varepsilon \qquad (11)$$

pentru diferiti d.
Interpretam pe β ca fiind statistica H, α termenul de interceptare care ofera informatii despre distributia datelor. Daca se face presupunerea ca seria este distribuita normal (Gauss) si ca procesul este independent cu variatii finite atunci

$$R_d/S_d=(\pi n/2)^{1/2} \qquad (12)$$

Deoarece ecuatia de regresie (11) este aproximata cel mai bine de

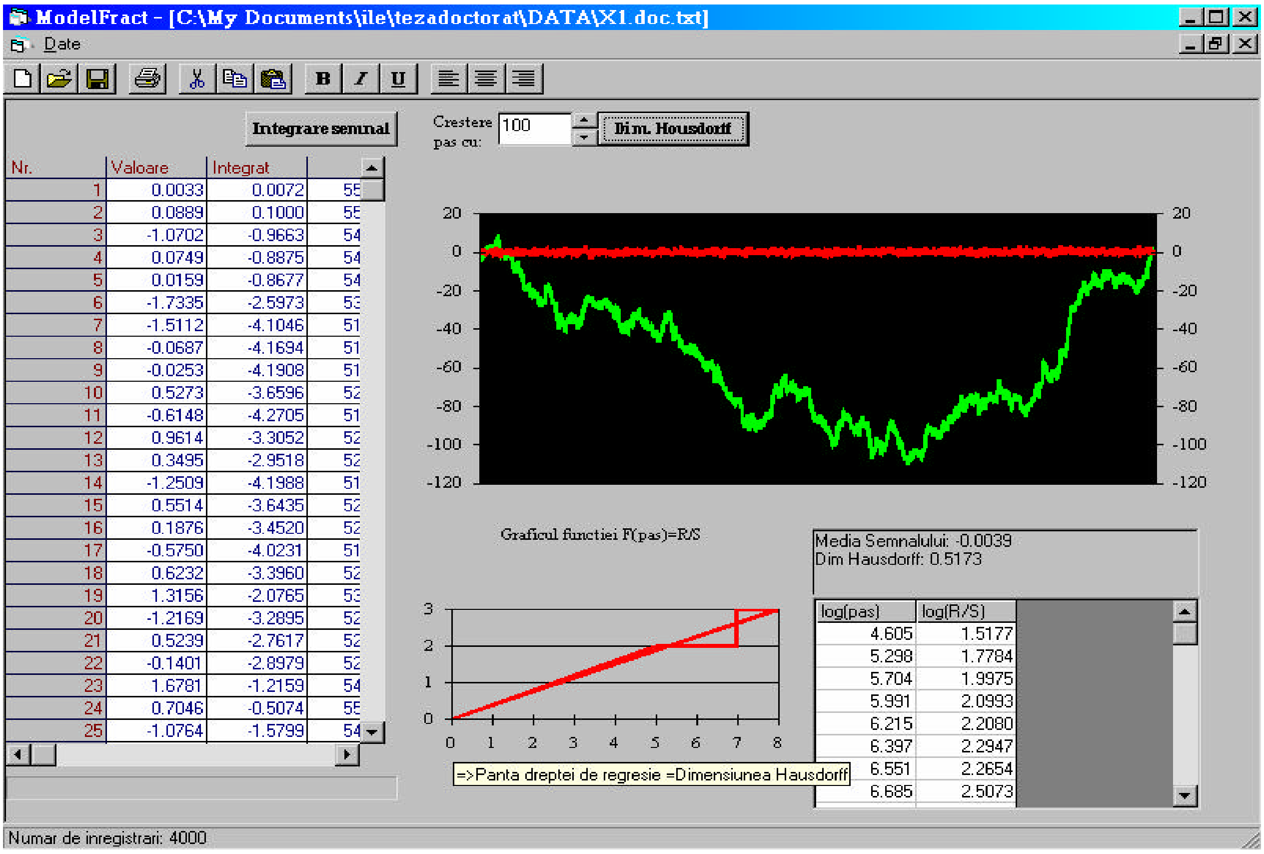
$$R_d/S_d=(\alpha n)^\beta \qquad (13)$$

la o distributie normala, rezulta ca α în acest caz trebuie sa fie π/2.

5. Concluzii
Aceste tendinte de autocorelare s-au observat si în seriile de timp care înregistreaza evolutia unor fenomene care erau considerate pâna nu demult ca fiind aleatoare.

- **Evolutii bursiere, evolutii de stocuri, evolutii pe piata de valori**

S-a demonstrat ca evolutia cotatiei unei actiuni la bursa de valori (ca de asemenea pretul valutei sau variatia cotatiilor la bursa) reprezinta o serie temporala autocorelata. Pretul unei actiuni la momentul curent depinde de pretul înregistrat la un moment anterior de timp, ceea ce înseamna ca evolutia acestuia nu este aleatoare. Determinând dimensiunea fractala a acestor serii se fac estimari ale evolutiilor viitoare.
Prin aceasta s-a demonstrat ca de fapt atunci când vorbim despre evolutie haotica ne referim la o evolutie a carei lege de desfasurare este una de autocorelare.
Folosind aceste metode am dezvoltat o aplicatie de determinare a dimensiunii Hausdorff pentru serii de timp. Mai jos se poate observa o serie de timp a carei dimensiune Hausdorff a fost determinata cu aceasta aplicatie. Seria este una de test si a fost generata dupa o metoda de generare de serii de timp cu medie si dimensiune fractala data.



Nu de mult timp s-a ajuns la concluzia (prin experimente), ca aceste fenomene considerate aleatoare (urmarind o lege de distributie Gaussiana) depind de fapt în mare masura de nivelurile înregistrate anterior.

- **Simulari**

Prin utilizarea de numere pseudoaleatore (siruri autocorelate de dimensiune fractala data la simularea unor fenomene de tipul celor mentionate mai sus).

6. Anexe

Algoritmul simplu de determinare a exponentului Hurst este urmatorul:

```
procedure Hurst(n,x)
//n lungimea seriei de date
//x valorile seriei
for i=3 to n do
        for j=0 to n-rest(n/i) do
                R←0;
                S←0;
                for k=j to j+i do
                        temp[k]←X[k]-media(X,j,j+I);
                        X1[k]←X1[k]+temp[k];
                endfor
                for k=n-rest(n/i) to n do
                        temp[k]←X[k]-media(X,n-rest(n/I),n);
                        X1[k]←X1[k]+temp[k]; //seria X integrata
                endfor
                R←R+max(X,j,j+i)
                S←S+std(X1);
        endfor
Rv[i]←R/int(n/i);
Sv[i]←S/int(n/i);
endfor
//v este un vector al timpului actualizat de la 1( 1,2,…,n)
H=regresie(log(Rv/Sv),log(v));
return H
endprocedure
```

7. Bibliografie

[1] Brent Ambrose, Esther Ancel, Mark D. Griffits - “The Fractal Structure of Real Estate Investment Trust Returns:The Search

for Evidence of Market Segmentation and Nonlinear Dependency", Journal of the American Real Estate and Urban Economics Association, vol.20,1: p25-54

[2] Robert J.Korsan - "Fractals and time series analysis", Decisions, Uncertenity and all that vol.II pg39

[3] Lo A - "Long term memory in stock prices", Econometrica 59:1991 pg279:300

[4] "Fractal Geometry: Mathematical foundation and Applications" -John Wiley&Sons

[5] B. Mandelbrot - "Statistical methodology for non-periodic cycles: From the covariance to R/S analysis", Annals of Social Mesurement 1972

[6] B.Mandelbrot – "The fractal geometry of nature", W.H.Freeman 1973

[7] R.K.Mishra, D.Moaβ & E.Zwielein – "On self-organization. An interdisciplinary search for unifying principle", Springer Verlag 1994

[8] Florin Munteanu, Cristian Ioana, Cristian Suteanu - "Smoothing dimensions for time series characterization", Fractals vol.III nr.2 1995