Comentarii pe marginea exemplului lui Norberg

Asist. Virginia ATANASIU,
Catedra de Matematic\, A.S.E. Bucuresti

Articolul vizeaz\, cu prec\dere, exemplul lui Norberg – subiect ce a constituit tema articolului [4] -, eviden]iind câteva dintre calit\]ile de baz\ ale sale pentru credibilitatea teoriei asigur\rilor non-via]\. ~n acest sens, definim prima pur\ de risc a unui contract [i coroborat cu no]iunea respectiv\ definim "principiul primei", introducem conceptele de credibilitate total\ [i par]ial\ ce pot fi acordate primei de risc [i prezent\m câteva generaliz\ri ale portofoliului implicat ^n exemplul lui Norberg la modelele ierarhice.

Cuvinte cheie: *prima de risc, factor de credibilitate, credibilitate total\ [i credibilitate par]ial\, model ierarhic.*

O prima remarc\ asupra exemplului lui Norberg vizeaz\ proiectarea unei structuri de prime pentru portofoliul eterogen. ~n acest sens, facem observa]ia urm\toare: prin "*prima pur*" a riscului X se ^n]e-lege valoarea medie a lui X; un "princi-piu al primei" este o regul\ care ofer\ o prim\ pentru un risc.

~ntr-un portofoliu eterogen nu se poate da un "principiu al primei" pentru calcu-larea primelor pure individuale de deoa-rece principiul primei presupune cunos-cut\ distribu]ia riscului ^n cadrul contrac-telor.

}inând seama de defini]ia *primei pure* de risc, θ_j din exemplul lui Norberg pri-me[te interpretarea *primei pure* a riscului X_j; cum ^ns\ θ_j este necunoscut\, se ^n-locuie[te cu estima]ia ei

$$\hat{\theta} = \left[\left\{\sum_{r=1}^{n} x_{jr}\right\} / n\right],$$

astfel ^ncât prin *prima pur* pentru riscul X_j vom sub^n]elege pe $\hat{\theta}_j\ (j=\overline{1,20})$.

~n [4] $\hat{\theta}$ este media aritmetic\ a esti-ma]iilor $\hat{\theta}_j\ (j=\overline{1,20})$ sau, altfel spus, este media aritmetic\ a *primelor pure* in-dividuale de risc $\hat{\theta}_j\ (j=\overline{1,20})$; de aceea $\hat{\theta}$ o vom numi prima medie total\.

~ntrebarea pe care ne-o punem ^n cadrul exemplului lui Norberg, legat\ de cele expuse anterior, vizeaz\ modul ^n care pot fi taxa]i de]in\torii poli]elor respec-tive; astfel, ar trebui s\ se taxeze de]in\torii poli]elor cu prima total\ $\hat{\theta}$ sau ar trebui s\ se construiasc\ un sis-tem de tarifare bazat numai pe experien-]a individual\ (adic\ experien]a acumulat\ pentru fiecare risc ^n parte) [i s\ se cea-r\, ^n acest sens, pentru riscul X_j prima $\hat{\theta}_j$?

S-ar p\rea c\ cele 2 alegeri extreme ale primelor pure individuale de risc ar fi $\hat{\theta}$ [i $\hat{\theta}_j\ (j=\overline{1,20}\ \text{fixat})$. Exist\ argumente ^mpotriva folosirii oric\reia din cele 2 extreme, [i anume:

- impunerea primei totale $\hat{\theta}$ este ne-dreapt\ pentru toate riscurile, cu excep]ia riscurilor 9,11 [i 17, ^ntrucât riscul 9 conduce la prima $\hat{\theta}_9$= 0,6 , riscul 11 la prima $\hat{\theta}_{11}$= 0,4 [i respectiv 17 la $\hat{\theta}_{17}$= 0,5, ^n timp ce restul (celelalte riscuri) conduc la primele:
$\hat{\theta}_1=\hat{\theta}_2=\hat{\theta}_4=\hat{\theta}_5=\hat{\theta}_8=\hat{\theta}_{15}=\hat{\theta}_{16}=\hat{\theta}_{20}=0$;
$\hat{\theta}_{10}=\hat{\theta}_{13}=\hat{\theta}_{14}=\hat{\theta}_{18}=\hat{\theta}_{19}=0,1$;
$\hat{\theta}_3=\hat{\theta}_6=\hat{\theta}_7=0,2$; $\hat{\theta}_{12}=0,3$. Un astfel de sistem de tarifare tinde s\ ^nl\ture (s\ elimine) riscurile "bune" [i s\ atrag\ ris-curile "rele" (periculoase);
- impunerea primei pure individuale de risc este ^mpotriva scopului ^n sine al asigur\rii, deoarece riscul nu este dis-tribuit ^ntr-un grup de poli]e similare, iar fiecare

posesor de poli]\ pl\te[te pentru propriile sale preten]ii.

S-ar putea ajunge, ^ns\, la un compro-mis, taxând:

$$\theta_j^a = z.\hat{\theta}_j + (1-z).\hat{\theta} \;\; (j = \overline{1,20}, \textbf{fixat})$$

sau, cu alte cuvinte, un compromis ar fi o prim\ de forma θ_j^a, cu $z \in (0,1)$.

Facem ^n continuare observa]ii referitoare la z:

1° Ponderea z, din expresia lui θ_j^a, co-respunz\toare primei pure individuale de risc $\hat{\theta}_j$ se nume[te factor de credibili-tate; ponderea ce urmeaz\ a fi acordat\ experien]ei individuale este exprimat\ ^n factorul de credibilitate. Pare rezonabil ca z s\ creasc\ cu n (=lungimea perioadei de observa]ie); când num\rul de ani cre[te; pare rezonabil s\ atribuim mai mult\ credibilitate primei individuale de risc (cu cât este mai mult\ experien]\, adic\ $n \to \infty$, cu atât mai mare este ^ncre-derea pe care o acord\m primei indivi-duale de risc); θ_j^a cre[te odat\ cu $\hat{\theta}_j$ (cu cât este mai mare prima individual\ de risc $\hat{\theta}_j$, cu atât este mai mare prima θ_j^a);

2° Dac\ z=0 , atunci prima medie de ta-xare θ_j^a (^i spunem “medie”, deoarece apare ca media aritmetic\ ponderat\ a primelor $\hat{\theta}_j$ [i $\hat{\theta}$) este egal\ cu prima total\ $\hat{\theta}$; acest fapt este acceptabil ^ntr-un portofoliu omogen, dar nu [i ^ntr-unul eterogen. ~n cazul portofoliului omogen, când toate riscurile au acee[i valoare me-die, deci aceea[i prim\, media colectiv\ este cea mai bun\ estimare liniar\ pentru prima de risc;

3° Dac\ z=1 atunci prima medie liniar\ de taxare θ_j^a este egal\ cu prima indivi-dual\ de risc, ceea ce ^nseamn\ c\ poli]a este evaluat\ numai pe baza propriei sale experien]e. ~n general, informa]iile indi-viduale sunt pu]ine [i limitate, astfel ^n-cât acest estimator nu poate fi folosit ^n practic\.

Conchidem, spunând despre portofoliul e-terogen, c\ pentru fiecare element al s\u sunt folosite atât informa]iile disponibile la nivelul colectivului cât [i cele indivi-duale; deci ^ntr-un portofoliu eterogen ambele tipuri de experien]\ se ^mpletesc.

A doua remarc\ introduce no]iunile de credibilitate total\ [i credibilitate par]ial\, ce pot fi acordate estimatorului:

$$\hat{\theta}_j = \left[\left\{ \sum_{r=1}^{n} x_{jr} \right\} / n \right], \; \left(j = \overline{1,20} \text{ fixat} \right).$$

Spunem c\ estimatorului $\hat{?}_j$ al parame-trului necunoscut q_j i se acord\ credibi-litate total\, dac\ probabilitatea ca frec-ven]a relativ\ $\hat{?}_j$ s\ se abat\ ^n valoare absolut\ de la probabilitatea θ_j cu mai pu]in de $(k \cdot \theta_j)$ este cel pu]in egal\ cu $(1-\varepsilon)$, unde $\varepsilon, k > 0$ sunt foarte mici.

S\ presupunem c\ $\hat{?}_j$ s-a construit pe baza a n observa]ii independente efectu-ate asupra contractului j. Num\rul n nu reprezint\ ^n mod necesar num\rul de ani ^n care poli]a j s-a aflat sub obser-va]ie, ci poate semnifica, de asemenea, num\rul total al anilor de observa]ie pen-tru un grup de contracte, toate având θ_j drept parametru, adic\ n poate fi consi-derat suficient de mare. La aceast\ ulti-m\ interpretare a lui n vom face apel ^n continuare.

~n cazul credibilit\]ii totale (integrale) a-cordate lui $\hat{?}_j$, problema care se pune este determinarea rangului n_0, ^ncepând de la care are loc inegalitatea din defini-]ia no]iunii de credibilitate total\ acordat\ lui $\hat{?}_j$ [i anume:

$$P(|\hat{?}_j - \theta_j| < k \cdot \theta_j) \geq 1-\varepsilon \quad (1),$$

fapt realizabil (posibil) numai dac\ se folose[te “aproximarea normal\”; aproxi-marea normal\ este justificat\ atunci când n este suficient de mare, ori la noi a[a [i este. ~n aceste condi]ii $(n \to \infty)$ va-riabila aleatoare $\hat{?}_j$ are o reparti]ie asimptotic\ sau limit\ normal\:

$$\hat{?}_j \underset{\approx}{\in} N\left(?_j, \sqrt{\frac{\theta_j(1-\theta_j)}{n}} \right),$$

conform teoremei Moivre-Laplace, de unde rezult\ c\ variabila aleatoare:

$$\left[\left(\hat{\theta}_j-\theta_j\right)/\sqrt{\theta_j(1-\theta_j)/n}\right] \underset{\approx}{\in} N(0,1).$$

Pentru a determina valoarea ini]ial\ n_0 a lui n, ^ncepând de la care are loc ine-galitatea (1) observ\m c\ aceasta este echivalent\ cu urm\toarea:

$$2\Phi\left(\frac{k\cdot\theta_j}{\sqrt{\frac{\theta_j(1-\theta_j)}{n}}}\right) \geq 1-\varepsilon,$$

de unde deducem c\:

$$n \geq \left\lfloor y^2\left(1-\theta_j\right)/\left\{k^2\theta_j\right\}\right\rfloor = n_0 \quad (2),$$

unde $y \overset{not}{=} \Phi^{-1}\left(\frac{1-\varepsilon}{2}\right)$, iar Φ reprezint\ func]ia integral\ a lui Laplace.

Prin urmare, ^n cazul $n \geq n_0$ (n_0 dat de (2)) se poate acorda credibilitate total\ lui $\hat{?}_j$.

S\ exemplific\m cu urm\torul caz parti-cular: dac\ ε=0,1; k=0,05 [i θ_j=0,5 atunci valoarea ini]ial\ n_0 a lui n ^nce-pând de la care i se poate acorda credi-bilitate total\ lui $\hat{?}_j$ este, f\când calcu-lele (^n (2)), $n_0 \approx 1089$.

~n cazul credibilit\]ii par]iale ce poate fi acordat\ lui $\hat{\theta}_j$, problema care se pune este aceea a determin\rii valorii facto-rului de credibilitate z. Norberg descrie, ^n acest sens, urm\torul ra]ionament: eroarea comis\ ^n cazul aproxim\rii lui θ_j prin $?_j^a$ este egal\ cu:

$$\theta_j^a - \theta_j = z\left(\hat{?}_j - \theta_j\right) + (1-z)\left(\hat{\theta} - \theta_j\right) \quad \textbf{(3).}$$

Primul termen din egalitate (3) exprim\ eroarea datorat\ estim\rii pe baza expe-rien]ei individuale (pe baza informa]iilor acumulate ^n leg\tur\ cu riscul individual specific). Dac\ se cere ca variabila alea-toare (z|$\hat{?}_j$-θ_j|) s\ fie majorat\ de (kθ_j) cu o probabilitate foarte mare, notat\ (1-ε), (unde ε>0 este mic) atunci se ob]ine, rezolvând ecua]ia rezultat\ ^n raport cu z, c\:

$$Z=\min\left\{\sqrt{n/n_0},1\right\} \quad (4),$$

unde n_0 este cel din (2). Pentru z<1 (vezi (4)) avem de-a face cu credibilitate par]ial\.

A treia [i ultima remarc\ asupra exem-plului lui Norberg se refer\ la faptul c\ acesta poate fi generalizat ^n diferite moduri.

O modalitate este divizarea portofoliului eterogen ^n subportofolii de contracte echivalente, adic\ având aceea[i valoare a parametrului de risc sau, altfel spus, caracterizate prin parametrul de risc egal (comun) θ. ~ntr-un portofoliu eterogen, riscurile identice pot fi grupate ^mpreun\ ^n clase “omogene” de risc.

Prin urmare, este vorba despre o procedur\ care const\ ^n gruparea con-tractelor considerate a fi mai mult sau mai pu]in similare ^n sectoare (subporto-folii), ceea ce are drept urmare produce-rea unei mai mari eterogenit\]i ^ntre sectoare. ~n acest fel se ob]in modele ierarhice.

~n exemplul lui Norberg vom ^ncerca s\ grup\m contractele caracterizate prin pa-rametrul de risc egal θ. Astfel, s-ar pu-tea forma un grup cu contractele 9,11 [i 17, iar altul cu celelalte contracte, deoa-rece primul grup (sector, subportofoliu) poate fi caracterizat prin parametrul de risc egal (comun) q_1, iar al doilea grup prin parametrul de risc egal (comun) q_2.

Justificarea celor afirmate const\ ^n veri-ficarea perechilor de ipoteze (H_0,H_1) [i respectiv (H_0',H_1'), unde:

$$\begin{cases} H_0: \theta_9 = \theta_{11} = \theta_{17} \\ H_1: \theta_9 \neq \theta_{11} \neq \theta_{17} \end{cases}$$

iar:

$$\begin{cases} H_0^{'} :" \theta_i \textbf{ - urile sunt egal toat, cu } \mathbf{i = \overline{1,20}, i \neq 9, 11, 17";} \\ H_1^{'} :" \theta_i \textbf{ - urile nu sunt egale,cu } \mathbf{i = \overline{1,20}, i \neq 9, 11, 17"} \end{cases}$$

Testarea cuplurilor de ipoteze o vom realiza cu testul hi-p\trat (vezi[4]), luând ca prag (nivel) de semnifica]ie: α=0,05.

~n cazul perechii de ipoteze (H_0,H_1):

$$\chi^2_{calc} = \left\{ \sum_{i=9,11,17} \left(\hat{\theta}_i - \hat{\theta} \right)^2 \right\} / \left\{ \hat{\theta} \left(1 - \hat{\theta} \right) / 10 \right\},$$

unde : $\hat{\theta} = \left(\hat{\theta}_9 + \hat{\theta}_{11} + \hat{\theta}_{17} \right) / 3$ =0,5, iar: $\chi^2_{1-\alpha;3-1} = \chi^2_{0,95;2} = 5{,}99$.

~ntrucât $\chi^2_{calc} < \chi^2_{TAB}$ decidem acceptarea ipotezei H_0.

~n cazul perechii de ipoteze (H_0,H_1):

$$\chi^2_{calc} = \left\{ \sum_{i=\overline{1,20}; i \neq 9,11,17} \left(\hat{\theta}_i - \hat{\theta} \right)^2 \right\} / \left\{ \hat{\theta} \left(1 - \hat{\theta} \right) / 10 \right\},$$

unde $\hat{?} = \left\{ \sum_{i=\overline{1,20}, i \neq 9,11,17} \hat{?}_i \right\} / 17 \cong 0{,}08$, iar: $\chi^2_{1-\alpha;17-1} = \chi^2_{0,95;16} = 25{,}3$

Deoarece $\chi^2_{calc} < \chi^2_{0,96;16}$ decidem accepta-rea ipoteza $H_0^{'}$.

O alt\ divizare interesant\ a portofoliului eterogen din exemplul lui Norberg este o structur\ ierarhic\ cu 2 niveluri sau, altfel spus, o procedur\ de clasificare pe 2 niveluri, a c\rei descriere o realiz\m ^n continuare:

- “Nivelul sectorului”. A[a dup\ cum s-a constatat, portofoliul eterogen de 20 contracte a putut fi descompus ^n 2 sub-portofolii (sectoare), fiecare sector con-stând ^n grupe de contracte, caracterizate prin parametru de risc egal (comun). Sectorul 1 a constat ^n grupul de con-tracte 9,11 [i 17 [i a fost caracterizat prin parametrul de risc comun (egal) q_1, iar sectorul 2 a constat ^n grupul de contracte i, $i = \overline{1,20}$, cu i≠9,11,17 [i a fost caracterizat prin parametrul de risc comun (egal) q_2. Parametrii abstrac]i θ_i pentru fiecare risc i, $\mathbf{i = \overline{1,2}}$ nu sunt aceea[i, dar putem presupune c\ sunt ex-tra[i dintr-o densitate de structur\ u(θ), care descrie varia]ia lui θ_i, deci eteroge-nitatea dintre sectoare, ca [i cum ar fi realiz\ri independente ale unei variabile aleatoare θ;
- “Nivelul contractului”. Dat fiind sec-torul, grupul (clasa) de contracte sau ceea ce este acela[i lucru, contractul – deoarece clasa este o mul]ime la care se face adesea referire ca la un contract – este caracterizat printr-un alt parametru de risc. Astfel, ^n sectorul 1, contractele 9,11 [i 17 le caracteriz\m prin parametrii “adi]ionali” $q_{1,9}$; $q_{1,11}$; $q_{1,17}$, iar ^n sectorul 2, contractele j, $j = \overline{1,20}$; j≠9,11,17 le caracteriz\m prin parametrii “adi]ionali” q_{2j}, $j = \overline{1,20}$, j≠9,11,17 (i-am numit para-metri adi]ionali de risc deoarece con]in caracteristici adi]ionale de risc).

Not: La modelele ierarhice cu multi-nivele, parametrii de structur\ difer\ de la un nivel la altul (modelele ierarhice cu nivele multiple au parametrii de structur\ diferi]i pentru fiecare nivel).

Bibliografie:

[1] Goovaerts, M.J., Kaas, R., Van Heerwaarden, A.E., Bauwelinckx, T. (1990); Insurance Series, volume 3, Effective Actuarial Methods, University of Amsterdam, The Netherlands.

[2] Pentikäinen, T., Daykin, C.D., Pesonen, M. (1990); Practical Risk Theory for Actuaries, Université Pieré et Marie Curie.
[3] Sundt, B. (1984); An Introduction to Non-Life Insurance Mathematisc, Veröffentlichungen des Instituts für Versicherungswissenschaft der Universität Mannheim Band 28 (V.V.W Karlsruhe).
[4] Atanasiu,V. (1998); Exemplul lui Norberg, ca mod de ilustrare a teoriei credibilit\]ii ^n practic\, Informatic\ Economic\, nr. 7/1998.