Restaurarea imaginilor perturbate normal utilizând coeficientul Bhattacharyya

Conf.dr. Luminita STATE
Facultatea de Matematica, Universitatea Bucuresti
Prep. Catalina COCIANU
Catedra de Informatica Economica, A.S.E. Bucuresti

Distanta Bhattacharyya reprezinta o notiune derivata din marginea Chernoff a erorii clasificatorului Bayesian si are aplicatii în probleme de extragere de caracteristici, compresie de date, recunoastere de forme. În articolul de fata sunt prezentate rezultate furnizate de acest criteriu în problema restaurarii seturilor de imagini perturbate normal. Ideea ce sta la baza acestui tip de restaurare consta în modelarea pe doua clase: una de intrare, formata dintr-un set de imagini cu bruiaj gaussian puternic si una intermediara, formata din setul corespunzator de imagini filtrate binomial. Fiecare dintr clase furnizeaza câte un prototip, prototipul clasei intermediare fiind ajustat dupa informatia de separabilitate determinata pe baza distantei Bhattacharrya.

Cuvinte cheie: *clasa, distanta Bhattacharrya, margine Chernoff, repartitie normala, informatie de separabilitate, clasificator Bayesian.*

1. Introducere

Scopul fundamental al tehnicilor de restau-rare este acela de a îmbunatati intrarile per-turbate conform unor criterii prestabilite (lu-minozitate, contrast, eliminare de zgomot, refacere a unor parti ce au fost anterior bru-iate sau îndepartate din imaginea intrare). Restaurarea poate fi descrisa ca un proces de reconstructie a unei imagini pe baza unor cu-nostinte a priori legate de fenomenul de de-gradare. În consecinta, tehnicile de res-taurare sunt orientate pe modelarea degra-darii si aplicarea procesului invers în scopul reconstituirii imaginii initiale neperturbate.

Unul dintre cele mai întâlnite procese de de-gradare este perturbarea liniara continua. Functie de imaginea initiala f(x,y), semnalul rezultat g(x,y) poate fi exprimat pe baza unui operator H si a unui termen înglobat aditiv $\eta(x,y)$ ce reprezinta zgomotul: $g(x,y) = H(f(x,y))+\eta(x,y)$, în care informatiile rela-tive la η sunt de natura statistica. Procesul de restaurare revine la determinarea unei aproximari asupra lui f(x,y), cunoscându-se g(x,y) si operatorul H.

În abordarea de fata, modelul de degradare este dat de $g(x,y) = f(x,y) + \eta(x,y)$, în care $\eta(x,y)$ reprezinta zgomotul, presupus a fi variabila aleatoare distribuita normal. Este cunoscut faptul ca aplicarea unui filtru de tip binomial are efect de reducere a zgomotului, dar, de asemenea, si a calitatilor spatiale ale imaginii intrare (luminozitate, contrast, des-crierea obiectelor componente) [7,9]. Cu alte cuvinte, simpla aplicare a unei astfel de the-nici, mai ales în conditiile în care zgomotul este foarte puternic (η cu medie mare), nu poate conduce la o aproximare suficient de buna a imaginii initiale.

Tehnica de lucru prezentata în continuare se bazeaza pe combinarea efectelor induse de aplicarea unei masti binomiale de filtrare cu extragerea informatiei pierdute în urma aces-tui proces. Scopul este acela de a îmbunatati calitatea imaginilor filtrate utilizând o anu-mita cantitate de informatie de separabilitate globala extrasa din seturile de exemple ini-tiale si filtrate ale imaginii degradate.

Modelul de lucru contine: ($X_1^{(2)}$, $X_2^{(2)}$, …, $X_N^{(2)}$) versiunile cu zgomot ale imaginii initiale, cunoscute, ($X_1^{(1)}$, $X_2^{(1)}$, …, $X_N^{(1)}$) versiunile corespunzatoare filtrate, $X_i^{(k)} \in M_{r\times c}(\{0,1,\ldots,255\})$, $1 \le i \le N$, k = 1,2. Se presupune ca exemplele ($X_1^{(1)}$, $X_2^{(1)}$, …, $X_N^{(1)}$) rezulta în urma aplicarii mastii de filtrare $M_t = \frac{1}{12+t}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & t & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, $t \ge 4$, respectiv $X_i^{(1)} = F(X_i^{(2)})$, $1 \le i \le N$.

2. Algoritmul euristic de restaurare bazat pe distanta Bhattacharrya

Modelul clasificatorului Bayes utilizat pen-tru determinarea distantei Bhattacharyya este cel de discriminare între doua clase; infor-matia disponobila este data prin vectorii me-die ai celor doua clase μ_i, i= 1,2 si matricile de covarianta corespunzatoare Σ_i, i =1,2. Marginea Chernoff superioara a erorii Bayesiene este:

$$e_u = x_1^s x_2^{1-s} \int \left(f_1(x)\right)^s \left(f_2(x)\right)^{1-s} dx \ , s \in [0, 1] ,$$

unde $x = (x_1, x_2)$ reprezinta distributia *a priori* iar f_i reprezinta distributia cores-punzatoare celei de-a i-a clase, i= 1,2. Daca ambele functii de densitate sunt normale, $f_i \sim N(\mu_i, \Sigma_i)$, i = 1,2 , expresia lui ε_u poate fi scrisa astfel: $\int \left(f_1(x)\right)^s \left(f_2(x)\right)^{1-s} dx = \exp(-m(s))$, unde

$$m(s) = \frac{s(1-s)}{2}(m_2 - m_1)^T \left(s\Sigma_1 + (1-s)\Sigma_2\right)^{-1}(m_2 - m_1) + \frac{1}{2}\ln\frac{\left|s\Sigma_1 + (1-s)\Sigma_2\right|}{|\Sigma_1|^s |\Sigma_2|^{1-s}} .$$

Marginea superioara

$$m\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8}(m_2 - m_1)^T \left(\frac{\Sigma_1 + \Sigma_2}{2}\right)^{-1}(m_2 - m_1) + \frac{1}{2}\ln\frac{\left|\frac{\Sigma_1 + \Sigma_2}{2}\right|}{\sqrt{|\Sigma_1||\Sigma_2|}}$$

este numita distanta Bhattacharyya si este fo-losita în general ca masura de separabilitate a celor doua distributii. Dezvoltând în relatia anterioara cei doi termeni, se obtine:

$$m\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8} tr\left\{\overline{\Sigma}^{-1}(m_2 - m_1)(m_2 - m_1)^T\right\} + \frac{1}{4}\ln\left|2I_n + \Sigma_1\Sigma_2^{-1} + \Sigma_2\Sigma_1^{-1}\right| - \frac{n}{4}\ln 2 \text{, unde } \overline{\Sigma} = \frac{\Sigma_1 + \Sigma_2}{2}$$

Cum unul din termeni dispare daca $\mu_1 = \mu_2$ sau $\Sigma_1 = \Sigma_2$, primul termen furnizeaza infor-matia de separabilitate între clase pentru me-dii diferite, iar ultimul termen pentru cova-riante diferite. Distanta Bhattacharyya este folosita drept functie criteriu ce evalueaza calitatea extrac-torului linear de caracteristici $A \in M_{n\times m}(R)$. Daca $\Sigma_1 = \Sigma_2 = \Sigma$,

$$J = m\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8} tr\left\{\overline{\Sigma}^{-1}(m_2 - m_1)(m_2 - m_1)^T\right\}$$

atunci J reprezinta un caz particular al cri-teriului J_1 pentru matricile de împrastiere

$$S_2 = \Sigma \quad \text{si} \quad S_1 = S_b = (m_2 - m_1)(m_2 - m_1)^T$$

[5]. În consecinta, întreaga informatie de separabilitate este continuta în:

$$\Phi_1 = \frac{\Sigma^{-1}(m_2 - m_1)}{\left\|\Sigma^{-1}(m_2 - m_1)\right\|}.$$

Daca $m_1 = m_2$ si $\Sigma_1 \neq \Sigma_2$,

$$J = \frac{1}{4}\ln\left|2I_n + \Sigma_2^{-1}\Sigma_1 + \Sigma_1^{-1}\Sigma_2\right| - \frac{n}{4}\ln 2 = \frac{1}{4}\sum_{j=1}^{n}\left(2 + l_j + \frac{1}{l_j}\right) - \frac{n}{4}\ln 2,$$

unde $l_j, j = \overline{1,n}$ reprezinta valorile proprii ale matricei $\Sigma_1^{-1}\Sigma_2$.
Daca extractorul linear de caracteristici este definit de matricea $A \in M_{n\times m}(R)$, atunci valoarea distantei Bhattacharyya în spatiul transformat $Y = A^T X$ este data de:

$$J(m, A) = \frac{1}{4}\ln\left|2I_m + \left(A^T\Sigma_2 A\right)^{-1}\left(A^T\Sigma_1 A\right) + \left(A^T\Sigma_1 A\right)^{-1}\left(A^T\Sigma_2 A\right)\right| - \frac{m}{4}\ln 2.$$

Punctele critice ale functiei $J(m, A)$ sunt solutii ale ecuatiei $\frac{\P J(m, A)}{\P A} = 0$, adica:

$$B\left\{\Sigma_2 A\Sigma_2^{-1}(m)\Sigma_1(m)\Sigma_2^{-1}(m) - \Sigma_1 A\Sigma_2^{-1}(m)\right\} + B\left\{\Sigma_1 A\Sigma_2^{-1}(m)\Sigma_2(m)\Sigma_1^{-1}(m) - \Sigma_2 A\Sigma_1^{-1}(m)\right\} = 0$$

în care $\Sigma_i(m) = A^T\Sigma_i A, i = 1,2$ si $B = \left[\left(A^T\Sigma_1 A\right)^{-1}\left(A^T\Sigma_2 A\right) + \left(A^T\Sigma_2 A\right)^{-1}\left(A^T\Sigma_1 A\right) + 2I_m\right]^{-1}$

Solutiile suboptimale ale ecuatiei precedente sunt solutii ale sistemului:

$$\begin{cases}\Sigma_2 A\Sigma_2^{-1}(m)\Sigma_1(m)\Sigma_2^{-1}(m) - \Sigma_1 A\Sigma_2^{-1}(m) = 0\\ \Sigma_1 A\Sigma_1^{-1}(m)\Sigma_2(m)\Sigma_1^{-1}(m) - \Sigma_2 A\Sigma_1^{-1}(m) = 0\end{cases}$$

sau echivalent, $\Sigma_2^{-1}\Sigma_1 A = A\Sigma_2^{-1}(m)\Sigma_1(m)$.
Evident, functia criteriu J este invarianta la transformari nesingulare de aceea, $\Phi^{(m)} = (\Phi_1, \ldots, \Phi_m)$ poate fi considerat drept extractor linear de caracteristici suboptimal, unde $\Phi_i, i = \overline{1,m}$ sunt vectorii proprii corespunzatori valorilor proprii $l_1, \ldots, l_m$ ale matricei $\Sigma_2^{-1}\Sigma_1$, unde:

$$l_1 + \frac{1}{l_1} \geq \ldots \geq l_m + \frac{1}{l_m} \geq \ldots \geq l_n + \frac{1}{l_n}.$$

În cazul problemelor de restaurare, ambele presupuneri $m_1 = m_2$, $\Sigma_1 = \Sigma_2$ sunt în general nerealiste, de aceea trebuie acceptate presupunerile $m_1 \neq m_2$ si $\Sigma_1 \neq \Sigma_2$. Cum nu exista nici o procedura disponibila în cazul $\Sigma_1 \neq \Sigma_2$ si $m_1 \neq m_2$, în literatura de specialitate exista deja abordari suboptimale [8].

Algoritmul de restaurare HBA (Heuristic **B**hattacharyya **A**lgorithm**)**

Intrare: Exemplele perturbate $\left\{X_1^{(2)}, \ldots, X_N^{(2)}\right\}$ ale unei imagini $r \times c$-di-mensionala X si numarul dorit k de caracte-ristici

Pas1. Se calculeaza exemplele $\left\{X_1^{(1)}, \ldots, X_N^{(1)}\right\}$ utilizând masca de filtrare

$M_t = \frac{1}{12+t}\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & t & 2\\ 1 & 2 & 1\end{bmatrix}$, t≥4: $X_i^{(1)} = F(X_i^{(2)})$, $1 \leq i \leq N$.

Pas 2. Pentru fiecare coloana $1 \leq i \leq r$, se executa Step 3 - Step 8

Pas 3. Se calculeaza $\hat{m}^{(p)}(i) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} X_k^{(p)}(i)$,

$$\hat{\Sigma}_p(i) = \frac{1}{N-1}\sum_{k=1}^{N}\left(X_k^{(p)}(i) - \hat{m}^{(p)}(i)\right)\left(X_k^{(p)}(i) - \hat{m}^{(p)}(i)\right)^T, \quad p = 1,2.$$

Pas 4. Se determina:

$$m\left(\frac{1}{2}, i\right) = \frac{1}{8}\left(\hat{m}^{(2)}(i) - \hat{m}^{(1)}(i)\right)^T\left(\frac{\hat{\Sigma}_1(i) + \hat{\Sigma}_2(i)}{2}\right)^{-1}\left(\hat{m}^{(2)}(i) - \hat{m}^{(1)}(i)\right) + \frac{1}{2}\ln\frac{\left|\frac{\hat{\Sigma}_1(i) + \hat{\Sigma}_2(i)}{2}\right|}{\sqrt{\left|\hat{\Sigma}_1(i)\right|\left|\hat{\Sigma}_2(i)\right|}}$$

Pas 5. Se calculeaza valorile proprii $(l_1, \ldots, l_c)$ si vectorii proprii corespunzatori Φ_i, $i = 1, c$ ai matricei $\hat{\Sigma}_2^{-1}(i)\hat{\Sigma}_1(i)$ utilizând algoritmul de diagonalizare simultana.

Pas 6. Se ordoneaza valorile proprii astfel încât, pentru orice s si j cu $1 \le s < j \le c$,

$$\frac{\left[\Phi_s^T\left(\hat{m}^{(2)}(i) - \hat{m}^{(1)}(i)\right)\right]^2}{1 + l_s} + \ln\left(2 + l_s + \frac{1}{l_s}\right) \ge \frac{\left[\Phi_j^T\left(\hat{m}^{(2)}(i) - \hat{m}^{(1)}(i)\right)\right]^2}{1 + l_{ij}} + \ln\left(2 + l_j + \frac{1}{l_j}\right)$$

si se determina matricea de caracteristici $M(i) = (\Phi_1, \ldots, \Phi_k)^T$.

Pas 7. Se calculeaza $T\left(\hat{m}^{(1)}(i)\right)$ prin aplica-rea unui filtru prag asupra vectorului medie $\hat{m}^{(1)}(i)$ si termenul de corectie $Y(i) = M^T(i)\, T\left(\hat{m}^{(1)}(i)\right)$

Pas 8. Se determina linia $\overline{X}(i)$ din imaginea restaurata $\overline{X}$ aplicând o corectie imaginii filtrate $T\left(\hat{m}^{(1)}(i)\right)$ pe baza informatiei conti-nute de caracteristicile de selectie $\overline{X}(i) = T\left(\hat{m}^{(1)}(i)\right) + sM(i)Y(i)$ în care s este o constanta utilizata pentru prevenirea zgomotului, $0 < s < 1$.

3. Experimente si concluzii

Au fost efectuate experimente pentru imagini cu 256 nivele de gri de la alb la negru; implementarea algoritmului descris conduce la imagini superioare din punct de vedere al contrastului, luminozitatii si zgo-motului aproximarile prin medie sau prin media filtrata binomial.

Pentru algoritmii de calcul pentru pasii 4 si 5 din HBA s-au folosit metodele Chonlansky, respectiv metoda diagonalizarii simultane (în general, datorita filtrarii fara procesarea liniilor si coloanelor marginale prin simetrie, matricea de covarianta corespunzatoare celei de-a doua clase nu este inversabila, deci se calculeaza pseudoinversa).

Constantele folosite la pasii 1 si 8 depind în general de gradul de perturbare a intrarilor, tipul de filtru utilizat în nivelare (binomial sau extensii ale sale), numarul de date care pot fi acceptate (vectorii proprii asociati va-lorile proprii nenegative).

În continuare este prezentat un exemplu de executie a acestui algoritm.

Imaginile de intrare

Imaginea obtinuta prin aplicarea algoritmului HBA

Bibliografie

[1] Andrews, H., Hunt, B. *"Digital Image Restoration*", Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1977

[2] Anderson, T.W. *"An Introduction to Multivariate Statistical Analysis*", John Wiley &Sons, 1958

[3] Chellappa, R., Jinchi, H. *"A nonrecursive Filter for Edge Preserving Image Restoration*", Proc. Intl.Conf.on Acoustic, Speech and Signal Processing, Tampa,1985

[4] Chellappa, R., Kashyap,R.L. " *Digital Image Restauration Using Spatial Interaction Models*", Proc. Intl.Conf.on Acoustic, Speech and Signal Processing, vol. ASSP-30, 1982

[5] Cocianu C., *"Restaurarea imaginilor perturbate normal prin matrice de imprastiere"*, Informatica Economica, nr. 5/1998

[6] Devijver,P.A., Kittler,J. *"Pattern Recognition:A Statistical Approach*", Prentice-Hall Int.Inc.,1982

[7] Gonzales,R. ,Woods,R. *"Digital Image Processing*", Addison Wesley, 1993

[8] Fukunaga K. *"Introduction to Statistical Pattern Recognition*", Academic Press, Inc. 1990

[9] Pratt, W.K., *"Digital Image Processing*", Wiley, New York, 1978

[10] State L, *"Analiza in componente principale pentru compresia/restaurarea datelor"* Informatica Economica, Nr.2/1997

[11] State L., Cocianu C., *"Determinarea caracteristicilor lineare optimale din punct de vedere informational in compresia si decompresia datelor"* Informatica Economica, nr. 4/1997