Funcţiile bumerang: aplicaţii în mediul economico - social

Prof.dr. Marcel STOICA,
Catedra de Eficienţa Investiţiilor, A.S.E. Bucureşti

În cadrul numeroaselor procese care se desfăşoară în economie intervin acţiuni contradictorii, unele cu efecte benefice, altele cu efecte negative. Dacă se stimulează numai o singură latură a obiectivelor urmărite atunci executanţii pot să acţioneze în sens negativ. În cazul unei combinări ingenioase a două laturi contradictorii ale obiectivelor urmărite, executantul este nevoit să acţioneze corect, altfel va pierde. Această combinare se poate modela cu ajutorul unor funcţii care au proprietatea că orice acţiune aparent "favorabilă" executantului, dar defavorabilă sistemului general, se întoarce ca un "bumerang" asupra celui care a încercat să subordoneze interesele globale celor individuale. De aceea, aceste funcţii au fost denumite "funcţii bumerang". În această lucrare ne propunem să prezentăm o definiţie a funcţiilor bumerang şi să le ilustrăm prin două exemple concrete.

Cuvinte cheie: *funcţie bumerang, învăţământ,regret, câştig, penalizare, optim*

1. Introducere

Se numeşte **funcţie bumerang** un cuplu de două funcţii:

$$\{\ F(x): \Re^+ \to \Re^+;\ G(x): \Re^+ \to \Re^+\ \} \quad (1)$$

cu proprietatea că pentru orice parametru dat, $a \in \Re^+$, avem:

$$MIN_x\ F(x) = F(a) \geq MAX_x\ G(x) = G(a) \quad (2)$$

Un exemplu relativ simplu de construire a unor astfel de funcţii este următorul:

$$F(x) = \begin{cases} f(x) - \alpha\varphi(x) + \beta(a-x), & daca\ x \leq a \\ f(x) - \alpha\varphi(x) - v(x-a), & daca\ x > a \end{cases} \quad (3)$$

$$G(x) = \begin{cases} \gamma\varphi(x) - f(x) + \beta(a-x)p, & daca\ x \leq a \\ \gamma\varphi(x) - f(x) - u(x-a), & daca\ x > a \end{cases} \quad (4)$$

Valoarea a se numeşte *valoarea adevărată a lui x*. Parametrii α, β, γ *si* p care depind de a, b şi γ reprezintă penalizarea pentru acţiunile executantului care a declarat x cu proprietatea $x<a$, iar ulterior se dovedeşte că acest lucru nu a fost adevarat; p este probabilitatea ca, fiind dată o valoare adevărată a, iar executantul anunţând că s-a realizat valoarea $x<a$, să se penalizeze pentru descoperirea falsului. Funcţia *f(x) este o funcţie de "plată" pentru executant*, iar $\varphi(x)$ este funcţia de recompensă pentru executant; a este un coeficient care exprimă efortul pentru recompensare, $\alpha \in [0,1]$, $\gamma > 1$ coeficient care exprimă efectul de sinergie al recompensei; *u, v* sunt multiplicatori care au sensul de utilităţi.

În continuare, vom prezenta un exemplu simplu pentru stimularea profesorilor din învăţământul mediu, în sensul de a fi cât mai obiectivi la acordarea notelor pentru pregătirea elevilor şi o aplicaţie de o mare utilitate pentru folosirea principiului declaraţiei în fiscalitate.

2. Exemplu privind aplicarea funcţiilor de tip bumerang la estimarea rezultatelor obţinute într-un proces de învăţământ concurenţial

Într-un regim concurenţial, stimulentele depind de rezultatele obţinute. Aprecierea rezultatelor de către profesori trebuie să se facă cât mai obiectiv. Este posibil ca în cazul unei dependenţe parţiale de rezultate să apară tendinţa de a exagera o singură latură a procesului de învăţământ în dauna alteia. De exemplu, dacă profesorii sunt stimulaţi prin sistemul de salarizare sau premii să aibă rezultate cât mai bune în sensul unui mare număr de promovaţi, atunci după un timp oarecare de aplicare a unui astfel de sistem vor acorda cu uşurinţă note mari. Invers, dacă premierea profesorilor se face după numărul de elevi/studenţi examinaţi, atunci ei vor putea exagera în sensul de a da note cât mai mici, astfel încât să aibă

Funcțiile bumerang: aplicații în mediul economico - social

Prof.dr. Marcel STOICA,
Catedra de Eficiența Investițiilor, A.S.E. București

În cadrul numeroaselor procese care se desfășoară în economie intervin acțiuni contradictorii, unele cu efecte benefice, altele cu efecte negative. Dacă se stimulează numai o singură latură a obiectivelor urmărite atunci executanții pot să acționeze în sens negativ. În cazul unei combinări ingenioase a două laturi contradictorii ale obiectivelor urmărite, executantul este nevoit să acționeze corect, altfel va pierde. Această combinare se poate modela cu ajutorul unor funcții care au proprietatea că orice acțiune aparent "favorabilă" executantului, dar defavorabilă sistemului general, se întoarce ca un "bumerang" asupra celui care a încercat să subordoneze interesele globale celor individuale. De aceea, aceste funcții au fost denumite "funcții bumerang". În această lucrare ne propunem să prezentăm o definiție a funcțiilor bumerang și să le ilustrăm prin două exemple concrete.

Cuvinte cheie: *funcție bumerang, învățământ,regret, câștig, penalizare, optim*

1. Introducere

Se numește **funcție bumerang** un cuplu de două funcții:

$$\{\ F(x): \Re^+ \rightarrow \Re^+;\ G(x): \Re^+ \rightarrow \Re^+\ \} \quad (1)$$

cu proprietatea că pentru orice parametru dat, $a \in \Re^+$, avem:

$$\mathrm{MIN}_x\ F(x) = F(a) \geq \mathrm{MAX}_x\ G(x) = G(a) \quad (2)$$

Un exemplu relativ simplu de construire a unor astfel de funcții este următorul:

$$F(x) = \begin{cases} f(x) - \alpha\varphi(x) + \beta(a-x), & daca\ x \leq a \\ f(x) - \alpha\varphi(x) - v(x-a), & daca\ x > a \end{cases} \quad (3)$$

$$G(x) = \begin{cases} \gamma\varphi(x) - f(x) + \beta(a-x)p, & daca\ x \leq a \\ \gamma\varphi(x) - f(x) - u(x-a), & daca\ x > a \end{cases} \quad (4)$$

Valoarea a se numește *valoarea adevărată a lui x*. Parametrii α, β, γ *si p* care depind de a, b și γ reprezintă penalizarea pentru acțiunile executantului care a declarat x cu proprietatea $x<a$, iar ulterior se dovedește că acest lucru nu a fost adevărat; p este probabilitatea ca, fiind dată o valoare adevărată a, iar executantul anunțând că s-a realizat valoarea $x<a$, să se penalizeze pentru descoperirea falsului. Funcția *f(x) este o funcție de "plată" pentru executant*, iar $\varphi(x)$ este funcția de recompensă pentru executant; a este un coeficient care exprimă efortul pentru recompensare, $\alpha \in [0,1]$, $\gamma > 1$ coeficient care exprimă efectul de sinergie al recompensei; *u, v* sunt multiplicatori care au sensul de utilități.

În continuare, vom prezenta un exemplu simplu pentru stimularea profesorilor din învățământul mediu, în sensul de a fi cât mai obiectivi la acordarea notelor pentru pregătirea elevilor și o aplicație de o mare utilitate pentru folosirea principiului declarației în fiscalitate.

2. Exemplu privind aplicarea funcțiilor de tip bumerang la estimarea rezultatelor obținute într-un proces de învățământ concurențial

Într-un regim concurențial, stimulentele depind de rezultatele obținute. Aprecierea rezultatelor de către profesori trebuie să se facă cât mai obiectiv. Este posibil ca în cazul unei dependențe parțiale de rezultate să apară tendința de a exagera o singură latură a procesului de învățământ în dauna alteia. De exemplu, dacă profesorii sunt stimulați prin sistemul de salarizare sau premii să aibă rezultate cât mai bune în sensul unui mare număr de promovați, atunci după un timp oarecare de aplicare a unui astfel de sistem vor acorda cu ușurință note mari. Invers, dacă premierea profesorilor se face după numărul de elevi/studenți examinați, atunci ei vor putea exagera în sensul de a da note cât mai mici, astfel încât să aibă un număr mare de corijenţi/restanţieri. Funcţiile bumerang de apreciere a eficienţei sistemului de învăţământ sunt constituite astfel încât concurenţii (în exemplul dat, profesorii) să obţină rezultate maxime numai în condiţiile unei exigenţe cât mai obiective. Fie N numărul total al candidaţilor şi p numărul total de promovaţi (în condiţiile unei exigenţe obiective), n numărul candidaţilor nepromovaţi. Evident, $N = p + n$. Dacă K_p este punctajul acordat pentru un candidat promovat şi R_p recompensa pentru fiecare punct asociat candidaţilor promovaţi, t_n taxa care se încasează pentru fiecare candidat care repetă examenul, t_{ex}^1 tariful pentru examen (în prima fază) încasat de instituţie şi t_N^1 cota-parte (în prima fază) pentru examinator, atunci recompensa examinatorului este:

$$R_{ex}^1 = K_p \; R_p \; p + t_{ex}^1 \; t_n^1 \; N$$

Dacă în cazul unei recompense R_{ex} introducem şi rezultatele ulterioare se obţine o funcţie de tip bumerang care are proprietatea că maximul se realizează numai pentru cel mai obiectiv raport:

$$\overline{V} = \frac{\overline{n}}{\overline{p}}, \quad \overline{n} + \overline{p} = N$$

unde $\overline{n}, \overline{p}$ reprezintă numărul cel mai obiectiv de nepromovaţi, respectiv de promovaţi. Orice abatere de la acest raport se "întoarce" asupra mărimii recompensei totale, a examinatorului ca un "bumerang", diminuând valoarea recompensei.

Presupunem că toţi cei p promovaţi se prezintă la o nouă probă (o treaptă superioară de şcolarizare sau un concurs pentru ocuparea unui post într-o activitate care este retribuită), cu alţi profesori examinatori şi că numărul celor admişi este a. Evident că a este dependent de obiectivitatea raportului n/p, respectiv de numărul de promovaţi obiectiv $\overline{p}$. Astfel, dacă ar exista o obiectivitate perfectă am avea: $a = p = \overline{p}$. (5)

Recompensa totală, care include şi faza (1) de examinare, dar şi faza ulterioară ar fi:

$$R_{ex}^2 = R_{ex}^1 + t_{ex}^2 \; t_n^2 \; a \tag{6}$$

unde t_{ex}^2 reprezintă taxa de examinare pentru faza a doua, iar t_n^2 cota-parte ce revine examinatorului.

Dacă $p < \overline{p}$, atunci $a = p$. (7)

În acest caz se efectuează două corecţii: una pentru faza 1

$$\Delta R_1^1 = - K_p \; R_p \; (\overline{p} - p) \tag{8}$$

(această corecţie trebuie interpretată în sensul unui regret) şi o a doua corecţie pentru faza 2:

$$\Delta R^1 = t_{ex}^2 \; t_N^2 \; (\overline{p} - p) \tag{9}$$

Corecţia totală se defineşte ca suma acestor mărimi. Rezultă că:

$$R_{ex}^2 = R_{ex}^1 + \Delta R^1 \tag{10}$$

Dacă $p > \overline{p}$, atunci $a = \overline{p}$ (11)

Corecţiile posibile sunt, în acest caz, pentru faza 1:

$$\Delta R_1^2 = + K_p \; R_p \; (p - \overline{p}) \tag{12}$$

iar pentru faza 2:

$$\Delta R_2^2 = + t_{ex}^2 \; t_n^2 \; (p - \overline{p}) \tag{13}$$

Pierderile totale în faza 2 sunt:

$$\Delta R_2 = \Delta R_2^1 = \Delta R_2^2 =$$

$$K_p \; R_p \; (p - a) + t_{ex}^2 \; t_N^2 \; (p - a)$$

Funcţia bumerang este de forma:

$$R_{ex}^2 = \begin{cases} R_{ex}^1 + t_{ex}^2 \; t_N^2 - \Delta r_1 \\ R_{EX}^1 + t_{ex}^1 \; t_n - \Delta R_2 \end{cases} \tag{14}$$

Se observă că dacă $a = p = \overline{p}$ se obţine maximul acestei funcţii. Punctul a constituie un punct critic pentru funcţia bumerang. Sub acest aspect, funcţiile bumerang pot avea unul sau mai multe puncte critice. Funcţiile bumerang cu mai multe puncte critice necesită evidenţe foarte sofisticate (evident, pe calculator). În schimb, funcţiile bumerang cu un singur punct critic pot fi aplicate chiar în condiţiile actualei dotări cu echipamente de calcul. De exemplu, după o admitere, facultăţile informează licele asupra rezultatelor obţinute de absolvenţii lor (câţi candidaţi s-au prezentat, câţi reuşiţi au fost, cu ce rezultate). În cazul unui model probabilist se poate demonstra că probabilitatea de a maximiza funcţia de recompensă (pe cele două faze) se obţine tot în cazul $a = p = \overline{p}$.

În continuare sunt prezentate câteva metode de căutare a unor operatori selectivi ai strategiilor de instruire eficientă şi orientare profesională adecvată. Pentru selectarea celor mai

adecvate strategii de instruire, (psihologice, economice, financiare) este necesar să se folosească diferiţi operatori care să realizeze compunerea avantajelor şi dezavantajelor, exprimate numeric sau lingvistic. În acest scop se pot folosi diferiţi operatori de tip: liniar, minimax (sau maximax), multiplicativ (produs), regret etc. Operatorii liniari sunt de tip aditiv, combinaţi cu multiplicări (de fapt, combinaţii liniare). Pentru a se asigura aditivitatea factorilor de influenţă ai strategiei aplicate este necesară parcurgerea unei serii de operaţii şi anume:
- calculul utilităţilor (gradelor de apartenenţă) pe fiecare factor;
- asigurarea independenţei factorilor consideraţi (atât cauzal, cât şi statistic);
- determinarea unor coeficienţi de corelaţie parţială între factorii care nu sunt independenţi matematic, ci dependenţi stochastic;
- eliminarea efectului dependenţei parţiale prin corectarea coeficienţilor de importanţă a unuia din factori (de exemplu, a factorului *j* cu coeficientul $1 - \rho_{ij}$);
- determinarea coeficienţilor de importanţă k_j, prin şedinţe de explorarea ideilor experţilor (în care moderatorul obligă pe experţii cu divergenţe mari să-şi negocieze opiniile);
- însumarea utilităţilor (sau gradelor de apartenenţă) calculate pe factori, multiplicate cu coeficienţii de importanţă calculaţi la etapele anterioare.

Operatorii de tip multiplicativ se aplică sub forma unui produs al utilitaţilor (sau gradelor de apartenenţă). În unele cazuri se ridică utilităţile (sau gradele de apartenenţă) la diverse puteri a_j, j=1,2,...n unde *n* este numărul de factori luaţi în considerare. Dacă doi factori sunt dependenţi, atunci a_j se corectează prin multiplicarea cu $1 - \rho_{ij}$.
Operatorii de tip minimax sunt de forma: $\min_j (\max_i u_{ij})$, iar cei de tip maxmin: $\max_j (\min_i u_{ij})$. Regretele se calculează sub forma $R_{ij} = \max_j u_{ij} - u_{ij}$ şi apoi se aplică operatorul maximax. Evident, se pot experimenta mulţi alţi operatori de compunere (optimişti, pesimişti) şi se pot alege aceia care aduc maximum de eficienţă.

3. Impozitarea pe bază de simplă declaraţie

S-ar părea că în cazul impozitării pe baza unei simple declaraţii, contribuabilul va păgubi sistematic statul în urma falsificării rezultatelor financiare obţinute. Prin declararea unor venituri mici ar putea obţine reduceri nejustificate de impozit. Dacă, însă, impozitarea se practică pe baza a două elemente cu acţiune contradictorie asupra funcţiei obiectiv globale, cum ar fi venitul *x* şi gradul de folosire a capacitaţii *g*, atunci contribuabilul este nevoit să declare nivelul adevărat realizat. Acţiunea contradictorie a celor doi factori menţionaţi constă în faptul că prin reducerea venitului scade impozitul, dar rezultă şi o dimunuare a gradului de folosire a capacităţii de folosire *g*, ceea ce într-o legislaţie corect concepută măreşte fiscalitatea. Între gradul de folosire a capacitaţii *g* şi venitul realizat există o relaţie simplă:

$$g = x / CF$$

în care CF este capitalul fix disponibil.
Coeficientul de impozitare *a* depinde de acest grad de folosire, adică:

$$\alpha = \alpha_{max} - (\alpha_{max} - \alpha_{min})\, g = \alpha_{max} - \alpha_{min})\frac{x}{CF}$$

în care a_{min}, a_{max} sunt coeficienţi de impozitare minim, respectiv maxim. Impozitul plătit în acest caz (*Imp*) este dat de relaţia:

$$Imp = \alpha X = \alpha_{max}\, x - (\alpha_{max} - \alpha \min)\frac{x^2}{CF}$$

Dacă admitem că valoarea adevărată realizată este *a*, atunci un contribuabil care ar declara că a realizat un venit x<a, ar plăti în medie, o valoare F(x) dată de relaţia:

$$F(x) = \alpha_{max}\, x - (\alpha_{max} - \alpha_{min})\frac{x^2}{CF} + \gamma(a - x)p$$

unde γ este penalizarea ca un contribuabil care declară mai puţin să fie descoperit de organele financiare de control şi penalizat. Dacă un contribuabil ar declara că a realizat un venit x>a atunci valoarea medie pe care ar fi obligat să o plătească este:

$$F(x) = \alpha_{max}\, x - (\alpha_{max} - \alpha_{min})\frac{x^2}{CF}$$

Dacă luăm în consideraţie obiectivul statului, atunci trebuie ca funcţia F(x) să fie maximă. Pentru contribuabil se poate construi o funcţie G(x) care reprezintă plăţile efectuate către stat. Această funcţie are expresia:

$$G(x) := \begin{cases} (\alpha_{max} - \alpha_{min})\dfrac{x^2}{CF} + \gamma(a - x)p, & daca\ x < a \\ (\alpha_{max} - \alpha_{min})\dfrac{x^2}{CF} - \alpha_{max}\, x, & daca\ x \geq a \end{cases}$$

Contribuabilul are ca obiectiv minimizarea funcţiei G(x). Cuplul {F(x), G(x)} constituie două funcţii bumerang ce pot fi ataşate procesului de impozitare. Pentru anumite valori ale parametrilor, în funcţie de capitalul fix şi de probabilitatea de a descoperi declaraţiile false atunci când au fost făcute de contribuabili, rezultă propreitatea de punct şa exprimată de relaţia (2). Determinarea corectă a nivelelor celor mai adecvate ale acestor parametri se poate face prin simulări repetate.

Bibliografie

1. Herb Cohen - Orice se poate negocia, Ed. Colosseum, Bucureşti, 1995
2. Scott, B. - Arta negocierilor, Ed. tehnica, seria Marketing, Bucureţti, 1996
3. Schattles, T. - Jocuri strategice şi analiza economică, Ed. Tehnică, Bucureşti, 1969
4. Păun, G. - Mecanisme generative ale proceselor economice, Ed. tehnică, Bucureşti, 1980