Restaurarea imaginilor perturbate normal prin matrice de împrăştiere

Prep. Cătălina COCIANU
Catedra de Informatică Economică, A.S.E. Bucureşti

Matricele de împrăştiere exprimă variabilitatea în cadrul unui sistem de clase considerat, cu aplicaţii în probleme de extragere de caracteristici, compresie de date, recunoaştere de forme. În articolul de faţă sunt prezentate rezultate furnizate de matricele de împrăştiere în problema restaurării seturilor de imagini perturbate normal. Ideea ce stă la baza acestui tip de restaurare constă în modelarea pe două clase: una de intrare, formată dintr-un set de imagini cu bruiaj gaussian puternic şi una intermediară (de lucru), formată din setul corespunzător de imagini filtrate binomial. Cele două clase furnizează câte un prototip, prototipul clasei intermediare fiind ajustat după informaţia de separabilitate determinată pe baza matricelor de împrăştiere şi a prototipului clasei de intrare.
Cuvinte cheie: *clasă, matrice de împrăştiere, repartiţie normală, informaţie de separabilitate, pseudoinversă*

1. Matricele de împrăştiere în extragerea de caracteristici; informaţia de separabilitate a claselor

Fie H un sistem de clase, ξ distribuţia claselor şi fiecare $h_i \in H$ având media μ_i şi matricea de covarianţă Σ_i.

<u>Definiţie</u>: Matricele de împrăştiere relative la sistemul de clase H sunt:

1. matricea de împrăştiere între clase: $S_b = \sum_{i=1}^{|H|} (\mu_i - \mu_0)(\mu_i - \mu_0)^T \xi(h_i)$; cu $\mu_0 = \sum_{i=1}^{|H|} \xi(h_i)\mu_i$ baricentrul sistemului de clase

2. matricea de împrăştiere în interiorul claselor: $S_w = \sum_{i=1}^{|H|} \xi(h_i)\Sigma_i$;

3. matricea de împrăştiere mixtură: $S_m = S_w + S_b$

Fie S_1, $S_2 \in \{S_b, S_w, S_m\}$, S_2 matrice inversabilă (deci $S_2 \neq S_b$); pe baza lor se definesc indicatori globali ai separabilităţii sistemului de clase considerat, daţi prin funcţiile criteriu J_1 şi J_2, definite astfel:

$$J_1 = tr(S_2^{-1} S_1);\ J_2 = \ln\left|S_2^{-1}S_1\right|.$$

<u>Observaţii:</u>

1) J_1 şi J_2 sunt invariante faţă de transformări nesingulare.

Într-adevăr, fie $h_i \sim \mu_i, \Sigma_i$, clasă de procese n-dimensionale, $X \in h_i$ şi $C \in M_n(\mathbf{R})$ matrice nesingulară; atunci $Y = CX \sim C\mu_i, C\Sigma_i C^T$. Fie S'_b, S'_w, S'_m matricele de împrăştiere corespunzătoare. Rezultă că $S'_b = CS_bC^T$, $S'_w = CS_wC^T$, $S'_m = CS_mC^T$, deci $S'_i = CS_iC^T$, $i = 1,2$.

$J'_1 = tr(S'^{-1}_2 S'_1) = tr((C^T)^{-1} S2^{-1} S_1C^T) = tr(S_2^{-1} S_1C^T(C^T)^{-1}) = tr(S_2^{-1} S_1) = J_1$

$J'_2 = \ln\left|S'^{-1}_2 S'_1\right| = \ln\left|\left(C^T\right)^{-1} S_2^{-1} S_1 C^T\right| = \ln\frac{\left|CS_1C^T\right|}{\left|CS_2C^T\right|} = \ln\frac{|S_1|}{|S_2|} = \ln\left|S_2^{-1}S_1\right| = J_2$

2) $J_1 = tr(\Lambda)$, unde Λ reprezintă matricea diagonală a valorilor proprii ale matricei $S_2^{-1} S_1$.

Într-adevăr, fie C matricea care diagonalizează simultan S_1, S_2; deci

$C^TS_1C = \Lambda$, $C^TS_2C = I_n$, $CC^T = S_2^{-1}$

$J_1 = tr(S_2^{-1} S_1) = tr(CC^T S_1) = tr(C^TS_1C) = tr(\Lambda) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$

3) Funcţia criteriu J_1 recomandă în procesul extragerii a m ($m < n$) caracteristici cei m vectori proprii corespunzători celor mai mari valori proprii ale matricei $S_2^{-1}S_1$ [2]. În consecinţă, extractorul de caracteristici este

$Y = A^T X$, unde $A = \phi^{(m)} B^{-1}$, cu $B \in M_m(\mathbf{R})$ matricea care diagonalizează simultan $S_1(m) = A^T S_1 A$ şi $S_2(m) = A^T S_2 A$ şi $\phi^{(m)} = [\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_m]$ *m* vectorii proprii corespunzători celor mai mari *m* valori proprii ale matricei $S_2^{-1} S_1$. Y reprezintă caracteristica ce conţine întreaga informaţie de clasificare de separabilitatea claselor evaluată cu funcţia criteriu J_1.

Studiul informaţiei de separabilitate în cazul particular $|H| = 2$

1. $S_2 = S_w$, $S_1 = S_b$

$S_b = \xi(h_1)\xi(h_2)(\mu_1 - \mu_2)(\mu_1 - \mu_2)^T$, $S_W = \xi(h_1)\Sigma_1 + \xi(h_2)\Sigma_2$ rang(S_b)=1, deci rang($S_w^{-1} S_b$) $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 = \lambda_3 = \ldots = \lambda_n = 0$, deci $J_1 = \lambda_1$

$$J_1 = \mathrm{tr}\left(\left(\xi(h_1)\Sigma_1 + \xi(h_2)\Sigma_2\right)^{-1} \xi(h_1)\xi(h_2)(\mu_1 - \mu_2)(\mu_1 - \mu_2)^T\right) =$$

$$= \xi(h_1)\xi(h_2)\mathrm{tr}\left((\mu_1 - \mu_2)\left(\xi(h_1)\Sigma_1 + \xi(h_2)\Sigma_2\right)^{-1}(\mu_1 - \mu_2)^T\right) =$$

$$= \xi(h_1)\xi(h_2)(\mu_1 - \mu_2)^T \Sigma^{-1}(\mu_1 - \mu_2)$$

Din punct de vedere al criteriului J_1 o singură caracteristică este optimală.

$$\phi_1 = \frac{S_w^{-1}(\mu_1 - \mu_2)}{\left\|S_w^{-1}(\mu_1 - \mu_2)\right\|}$$

$$S_w^{-1} S_b \phi_1 = \frac{\xi(h_1)\xi(h_2)}{\left\|S_w^{-1}(\mu_1 - \mu_2)\right\|} S_w^{-1}(\mu_1 - \mu_2)(\mu_1 - \mu_2)^T S_w^{-1}(\mu_1 - \mu_2) = \lambda_1 \frac{S_w^{-1}(\mu_1 - \mu_2)}{\left\|S_w^{-1}(\mu_1 - \mu_2)\right\|} = \lambda_1 \phi_1$$

$$A = \phi_1; \quad Y = A^T X = \frac{(\mu_1 - \mu_2)^T S_w^{-1} X}{\left\|(\mu_1 - \mu_2)^T S_w^{-1}\right\|}$$

2. $S_2 = S_m$, $S_1 = S_b$; fie Λ matricea diagonală a vectorilor proprii ai lui $S_2^{-1} S_1$ şi ϕ matricea vectorilor proprii asociaţi, deci.

$S_m^{-1} S_b \phi = \phi\Lambda$, deci $S_b \phi = S_m \phi \Lambda = (S_b + S_w)\phi\Lambda \Rightarrow S_b \phi(I_m - \Lambda) = S_w \phi \Lambda$

Înmulţind la dreapta cu $(I_n - \Lambda)^{-1}$ şi cu S_w^{-1} la stânga, relaţia precedentă devine:

$S_w^{-1} S_b \phi = \phi\Lambda(I_n - \Lambda)^{-1}$

Cum $\phi\Lambda(I_n - \Lambda)^{-1} = \phi((I_n - \Lambda)\Lambda^{-1})^{-1} = \phi(\Lambda^{-1} - I_n)^{-1}$ urmează că $S_w^{-1} S_b \phi = \phi(\Lambda^{-1} - I_n)^{-1}$, deci

$\mu = (\Lambda^{-1} - I_n)^{-1}$ este matricea diagonală a valorilor proprii ale lui $S_w^{-1} S_b$,

$$\mu_i = \frac{\chi_i}{1 - \lambda_i} \geq 0$$

Deci $S_w^{-1} S_b$ şi $S_m^{-1} S_b$ au aceiaşi vectori proprii ϕ.

3. $S_2 = S_m$, $S_1 = S_w$; fie Λ matricea diagonală a vectorilor proprii ai lui $S_2^{-1} S_1$ şi ϕ matricea vectorilor proprii asociaţi, deci.

$S_m^{-1} S_w \phi = \phi\Lambda$, $S_w \phi = S_m \phi\Lambda = (S_b + S_w)\phi\Lambda \Rightarrow S_w \phi(I_m - \Lambda) = S_b \phi\Lambda$

Înmulţind la stânga cu S_w^{-1} şi cu Λ^{-1} la dreapta, relaţia precedentă devine: $S_w^{-1} S_b \phi = \phi(I_n - \Lambda)\Lambda^{-1}$; cu aceeaşi observaţie făcută pentru alegerea precedentă, urmează că $S_w^{-1} S_b \phi = \phi(\Lambda^{-1} - I_n)$, deci $\mu = (\Lambda^{-1} - I_n)$ este matricea diagonală a valorilor proprii ale lui $S_w^{-1} S_b$. Urmează că $S_w^{-1} S_b$ şi $S_m^{-1} S_b$ au aceiaşi vectori proprii ϕ.

Observaţie: Funcţia criteriu J_2 recomandă acelaşi set de caracteristici ca şi J_1.

2. Restaurarea unui set de imagini perturbate normal prin matrice de împrăştiere

Tehnica de restaurare a unui set de imagini perturbate normal (bruiaj foarte puternic - media zgomotului foarte mare) pe baza matricelor de împrăştiere utilizează noţiunea

de informaţie de separabilitate a claselor, descrisă anterior. Ideea centrală a acestui tip de restaurare este aceea de a lucra pe două clase de semnale: prima clasă este constituită din setul de imagini perturbate ce reprezintă mulţimea de intrare, cea de-a doua conţine corespondentele imaginilor din prima clasă filtrate binomial (sau cu măşti din clasa celei binomiale). Restaurarea se face în două etape, şi anume: determinarea prototipurilor celor două clase, urmată de cumularea aditivă a unui procent din informaţia de separabilitate la prototipul clasei imaginilor nivelate.
Justificarea intuitivă a acestei tehnici porneşte de la ideea că nici unul dintre cele două prototipuri nu poate fi considerat o aproximare acceptabilă a imaginii asupra căreia s-a primit setul de informaţii iniţiale (setul perturbat). Prototipul primei clase păstrează încă suficient zgomot datorită, în primul rând, calităţii slabe a intrărilor şi numărului limitat de imagini-selecţie primite, iar cel de-al doilea prototip, deşi are zgomot suficient de mic, nu poate constitui o ieşire în sine datorită pierderii de informaţie (contrast, luminozitate, contururi) survenite în urma filtrării. Această informaţie semnicativă care se pierde datorită filtrării poate fi refăcută pe baza informaţiei de separabilitate dintre cele două clase.
În continuare vor fi descrişi doi algoritmi bazaţi pe matricele de împrăştiere S_w, S_b, respectiv S_m, S_w.

Restaurare folosind matricele S_w, S_b
<u>Intrare</u>: Selecţia de imagini perturbate $X^{(2)}_1, X^{(2)}_2, ..., X^{(2)}_n$,
$\forall k \in \{1, 2, ..., n\}$ $X^{(2)}_k \in M_{linxcol}(\{0, 1, ..., g\})$, g = numărul nivelelor de gri
<u>Pas 1</u>: Se determină imaginile clasei intermediare $X^{(1)}_k$, $k \in \{1, 2, ..., n\}$, folosind un filtru de nivelare 3×3, dat de masca

$$M_t = \frac{1}{12+t}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & t & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, t \geq 4 \text{ (t = 4 corespunde unui filtru binomial)}$$

<u>Pas 2</u>: Se determină prototipurile celor două clase $\mu^{(1)}$, $\mu^{(2)}$, matricele de covarianţă de selecţie corespunzătoare celor două selecţii, notate Σ_2, respectiv Σ_1, precum şi matricele de împrăştiere corespunzătoare

$$S_w = \frac{\Sigma_1 + \Sigma_2}{2},$$

$$S_b = \frac{\left(\mu^{(1)} - \mu^{(2)}\right)\left(\mu^{(1)} - \mu^{(2)}\right)^T}{2}$$

<u>Pas 3</u>: Se calculează S^+_w (pseudoinversa matricii S_w conform teoremei Penrose) folosindu-se algoritmul lui Cholansky; este recomandabil ca în locul inversei să se folosească pseudoinversa pentru cazurile de slabă condiţionare, în care S_w nu este matrice inversabilă.
<u>Pas 4</u>: Se determină caracteristica optimală din punctul de vedere al criteriului J_1 pentru $S^+_w S_b$, $\phi_1 = \frac{S^+_w\left(\mu^{(1)} - \mu^{(2)}\right)}{\left\|S^+_w\left(\mu^{(1)} - \mu^{(2)}\right)\right\|}$, precum şi caracteristica ce conţine informaţia de separabilitate a celor două clase, considerându-se pentru aceasta prototipul celei de-a doua clase $Y = \phi^T_1\mu^{(1)}$.
<u>Ieşirea</u>: $X^{(1)} = \mu^{(1)} + \phi_1 Y*c$, unde c reprezintă constanta subunitară ce specifică procentul de informaţie de separabilitate luat în considerare în procesul de restaurare.

Restaurare folosind matricele S_m, S_w
<u>Intrare</u>: Selecţia de imagini perturbate $X^{(2)}_1, X^{(2)}_2, ..., X^{(2)}_n$,
$\forall k \in \{1, 2, ..., n\}$ $X^{(2)}_k \in M_{linxcol}(\{0, 1, ..., g\})$ g = numărul nivelelor de gri
<u>Pas 1</u>: Se determină imaginile clasei intermediare $X^{(1)}_k$, $k \in \{1, 2, ..., n\}$, folosind un filtru de nivelare 3×3, dat de masca

$$M_t = \frac{1}{12+t}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & t & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, t \geq 4 \text{ (t = 4 corespunde unui filtru binomial)}$$

Pas 2: Se determină prototipurile celor două clase $\mu^{(1)}$, $\mu^{(2)}$, matricele de covarianță de selecție corespunzătoare celor două selecții, notate Σ_2, respectiv Σ_1, precum și matricele de împrăștiere corespunzătoare

$$S_w = \frac{\Sigma_1 + \Sigma_2}{2}, \quad S_m = S_w + S_b,$$

$$Sb = \frac{\left(\mu^{(1)} - \mu^{(2)}\right)\left(\mu^{(1)} - \mu^{(2)}\right)^T}{2}$$

Pas 3: Se calculează vectorii și valorile proprii ai lui $S^+_m S_w$ utilizând algoritmul de diagonalizare simultană ($S^+_m S_w$ este în general nesimetrică):

3.1 Se determină Λ_1, ϕ_1 - matricele valorilor proprii, respectiv vectorilor proprii corespunzătoare lui S_m; dacă S_m este doar semipozitiv definită (în acest caz, corespunzător faptului că este singulară) se elimină vectorii proprii corespunzători valorilor proprii nule. În continuare se vor nota cu Λ^*_1, $\phi^*_1 \in M_{(n-t)\times(n-t)}(\mathbf{R})$ matricele obținute în urma acestuei eliminări, unde t reprezintă numărul de valori proprii nule ale matricei S_m.

3.2 Se calculează $K = \left(\phi^*_1 \Lambda_1^{*\,-\frac{1}{2}}\right)^T S_w \phi^*_1 \Lambda_1^{*\,-\frac{1}{2}}$

$\in M_{(n-t)\times(n-t)}(\mathbf{R})$, precum și matricea vectorilor proprii corespunzători lui K, notată Ψ'_{n-t}.

3.3 Se determină matricea caracteristicilor

$$A = \phi^*_1 \Lambda_1^{*\,-\frac{1}{2}} \Psi_{n-t}$$

Pas 4: Se calculează caracteristica ce conține informația de separabilitate a celor două clase, considerându-se pentru aceasta prototipul celei de-a doua clase $Y = A^T \mu^{(1)}$

Ieșirea: $X^{(1)} = \mu^{(1)} + AY*c$, unde c reprezintă constanta subunitară ce specifică procentul de informație de separabilitate luat în considerare în procesul de restaurare.

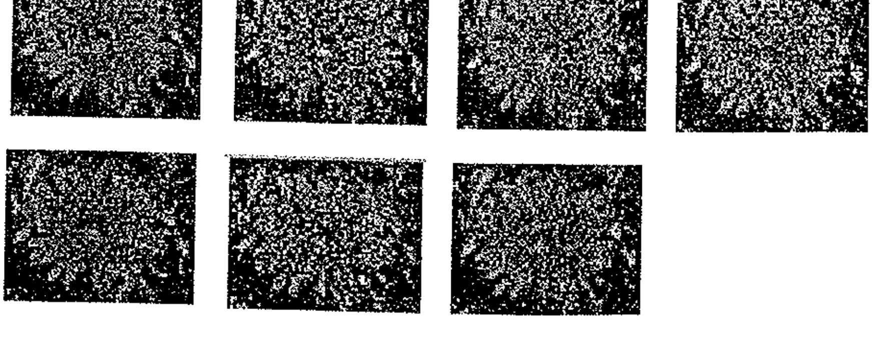
3. Experimente și concluzii

Au fost efectuate o serie de experimente pe imagini cu 256 de nivele de gri de la alb la negru, cu rezultate care au demonstrat că gradul de refacere din zgomot al acestor algoritmi este suficient de mare încât să justifice efortul computațional pe care aceștia îl solicită. Pentru implementarea lor au fost folosiți algoritmi de analiză numerică extrem de performanți din punct de vedere al erorilor (algoritmul lui Cholansky pentru determinarea pseudoinversei, algoritmul de diagonalizare simultană pentru calculul vectorilor proprii).

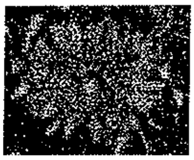
Constantele folosite în algoritmii descriși depind în general de gradul de perturbare a intrărilor, tipul de filtru utilizat în procesul de nivelare aplicat pentru eliminarea zgomotului (filtru binomial sau extensii ale sale), numărul de date care pot fi acceptate (numărul vectorilor proprii asociați valorilor proprii nenegative); în implementările realizate, constantele utilizate sunt în general apropiate de 1/t (unde t reprezintă numărul datelor aberante care se elimină pe parcursul algoritmului de diagonalizare simultană) pentru cea de-a doua implementare, respectiv 1/col pentru prima implementare.

În continuare sunt prezentate rezultatele celor doi algoritmi descriși pentru un set de 7 imagini intrare, fiecare imagine având un zgomot gaussian cu media variind între 30 și 50.

Setul de imagini de intrare



Rezultatul aplicării algoritmului bazat pe matricele de împrăştiere S_w, S_b



Rezultatul aplicării algoritmului bazat pe matricele de împrăştiere S_m, S_w

Bibliografie:

[1] Chang Shi-Kuo *Principles of Pictorial Information Systems Designs,* Prentice Hall, 1989

[2] P. Devijver, J. Kittler *Pattern Recognition. A Statistical Approach ,* Prentice Hall, 1989

[3] K. Fukunaga *Introduction to Statistical Pattern Recognition,* Academic Press, 1990

[4] B. Jahne *Digital Image Processing: Concepts, Algorithms and Scientific Applications,* Springer Verlag, 1993

[5] T. Young, T. Calvert *Clasification, Estimation and Pattern Recognition,* Elsevrer, 1974