Determining European Options Values through Crank-Nicolson Method

Prof.dr. Ion LUNGU, Catedra de Informatică Economică, A.S.E. Bucureşti,
Lect.dr. Sorin MANOLE, Universitatea "Constantin Brâncoveanu" Piteşti

Options are nowadays transacted within a lot of stock exchanges worldwide. The problem of options gets a special importance due to the fact that many of the managerial decisions can be assimilated to options. The paper deals with numerical methods of financial options evaluation. The mathematical model of determining the values of an option of European type is partial differential equation with an initial condition and two boundaries conditions, and for its solving, finite differences methods can be used. Out of these methods, the Crank-Nicolson method is proposed to be used. As Crank-Nicolson method is an implicit one, applying it leads to a linear system of equations, for whose solving the LU algorithm, Gauss method, Jacobi method, Gauss – Seidel method, method of successive over-relaxations are used.
Keyworks: *European options, values of an option, Crank – Nicolson Method, LU algorithm, Gauss method, Jacobi method, Gauss – Seidel method, method of successive over-relaxations.*

1 Introducere

1.1. Opțiuni financiare

O opțiune conferă deținătorului dreptul, dar înlătură obligația, de a tranzacționa o cantitate oarecare dintr-un activ financiar, la o dată fixată înainte şi la un preț prestabilit.

Cumpărătorul unei opțiuni are dreptul, însă nu şi obligația, de a cumpăra sau vinde o anumită cantitate de active suport (materiale, financiare, valutare etc.), la o dată convenită şi la un preț fixat înainte.

Vânzătorul unei opțiuni îşi asumă irevocabil obligația de a vinde sau cumpăra o cantitate de active, la termenul de scadență, la un preț convenit, chiar dacă la momentul exercitării opțiunii piața îi este nefavorabilă.

După data expirării întâlnim opțiuni de tip **european** – care se exercită doar la exercițiu şi opțiuni de tip **american** – care se pot exercita în orice moment de timp anterior scadenței.

Din punct de vedere al naturii există opțiuni de tip **call** (de cumpărare) şi opțiuni de tip **put** (de vânzare).

1.2. Problema evaluării opțiunilor financiare

Pentru evaluarea unei opțiuni europene este necesar să se rezolve o ecuație cu derivate parțiale cu o condiție inițială şi două condiții la limită.

Vom folosi următoarele notații: t - momentul curent de timp, T - termenul de exercițiu, E - prețul de exercițiu (prețul la care se face tranzacția), $S(t)$ (sau S) - prețul activului suport, $C(S,t)$ (sau C) - prețul unei opțiuni call, $P(S,t)$ (sau P) - prețul unei opțiuni put, $V(S, t)$ - $C(S, t)$ sau $P(S, t)$, σ - volatilitatea (abaterea standard a valorii activului financiar), r - rata dobânzii.

Considerând r şi σ constante în timp, problemele de determinare a valorilor unei opțiuni europene de tip call şi put $(P1)$, respectiv $(P2)$ sunt

$$(P1)\begin{cases}\dfrac{\partial C}{\partial t}+\dfrac{1}{2}\sigma^2 S^2\dfrac{\partial^2 C}{\partial S^2}+rS\dfrac{\partial C}{\partial S}-rC=0\\ C(S,T)=\max(S-E,0)\\ C(0,t)=0\\ C(S,t)\approx S,\ \text{când}\ S\to\infty\end{cases}$$

$$(P1)\begin{cases}\dfrac{\partial C}{\partial t}+\dfrac{1}{2}\sigma^2 S^2\dfrac{\partial^2 C}{\partial S^2}+rS\dfrac{\partial C}{\partial S}-rC=0\\ C(S,T)=\max(S-E,0)\\ C(0,t)=0\\ C(S,t)\approx S,\ \text{când}\ S\to\infty\end{cases}$$

$$(P2)\begin{cases}\dfrac{\partial P}{\partial t}+\dfrac{1}{2}\sigma^2S^2\dfrac{\partial^2 P}{\partial S^2}+rS\dfrac{\partial P}{\partial S}-rP=0\\ P(S,T)=\max(E-S,0)\\ P(0,t)=Ee^{-r(T-t)}\\ P(S,t)\to 0,\ \text{când } S\to\infty\end{cases}$$

Ecuația diferențială din (P1) şi (P2) se numeşte **ecuația Black-Scholes**. Pentru rezolvarea acestor programe trebuie să se efectueze transformări care să conducă la programe mai simple, adică la ecuația de difuzie cu o condiție inițială şi două condiții la limită. Astfel, efectuând transformările

$$\begin{cases}S=Ee^x;\quad S\geq 0\Rightarrow x\in \mathbf{R} & (1)\\ t=T-\dfrac{\tau}{\frac{1}{2}\sigma^2};\quad t\leq T\Rightarrow \tau\geq 0 & (2)\\ V(S,t)=Ee^{-\frac{1}{2}(k_1-1)x-\frac{1}{4}(k_1+1)^2\tau}u(x,\tau) & (3)\\ k_1=\dfrac{r}{\frac{1}{2}\sigma^2} & (4)\end{cases}$$

programele (P1) şi (P2) devin echivalente cu (P11), respectiv (P21)

$$(P11)\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial \tau}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ -\infty<x<\infty,\ \tau>0\\ u(x,0)=u_0(x)=max\left[e^{\frac{1}{2}(k_1+1)x}-e^{\frac{1}{2}(k_1-1)x},0\right]\\ \lim\limits_{x\to-\infty}u(x,\tau)=0\\ \lim\limits_{x\to\infty}u(x,\tau)\approx e^{\frac{1}{2}(k_1+1)x+\frac{1}{4}(k_1+1)^2\tau}\end{cases}$$

$$(P21)\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial \tau}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ -\infty<x<\infty,\ \tau>0\\ u(x,0)=u_0(x)=\max\left[e^{\frac{1}{2}(k_1-1)x}-e^{\frac{1}{2}(k_1+1)x},0\right]\\ \lim\limits_{x\to+\infty}u(x,\tau)=0\\ \lim\limits_{x\to-\infty}u(x,\tau)\approx e^{\frac{1}{2}(k_1-1)x+\frac{1}{4}(k_1-1)^2\tau}\end{cases}$$

Prin urmare, determinarea valorilor unei opțiuni europene de orice tip se reduce la rezolvarea următorului program generic:

$$(P)\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial \tau}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2},\quad -\infty<x<\infty,\quad \tau>0 & (5)\\ u(x,0)=u_0(x) & (6)\\ \lim\limits_{x\to-\infty}u(x,\tau)=f(x,\tau) & (7)\\ \lim\limits_{x\to+\infty}u(x,\tau)=g(x,\tau) & (8)\end{cases}$$

unde formele analitice ale funcțiilor f, g şi u_0 depind de tipul concret de opțiune financiară ce urmează a fi evaluată. Soluția ecuației de difuzie (5) cu condiția inițială (6) şi condițiile la limită (7) şi (8) este o funcție definită pe domeniul $D=\{(x,\tau)\ /\ x\in\mathbf{R},\tau\geq 0\}$.

2. Determinarea valorilor opțiunilor europene prin metode numerice

Găsirea soluțiilor analitice este incomodă, motiv pentru care prezintă interes determinarea unor soluții numerice.
Pentru acest lucru, în locul domeniului D luăm rețeaua

$$R_{hk}=\{(x_n,\tau_m)\ /\ x_n=nh,\ \ \tau_m=mk,\ \ n\in\mathbf{Z},\ \ m\in\mathbf{N}\},$$

unde h, k sunt foarte mici şi reprezintă paşii de discretizare pe axa Ox, respectiv $O\tau$.
Deoarece $-\infty<x<\infty$, ne restrângem atenția asupra unui interval finit pe axa Ox, făcând limitarea $-N^-h\leq x\leq N^+h$, cu N^-h şi N^+h mari.
Conform relației (2), avem $\tau=\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)$, de unde rezultă că $\tau\in\left[0,\frac{1}{2}\sigma^2T\right]$. Cum acest interval de lungime $\frac{1}{2}\sigma^2T$ se împarte în intervale de lungime k, pentru nodurile rețelei considerată mai devreme avem $0\leq m\leq M$, unde M este dat de relația $Mk=\frac{1}{2}\sigma^2T$.

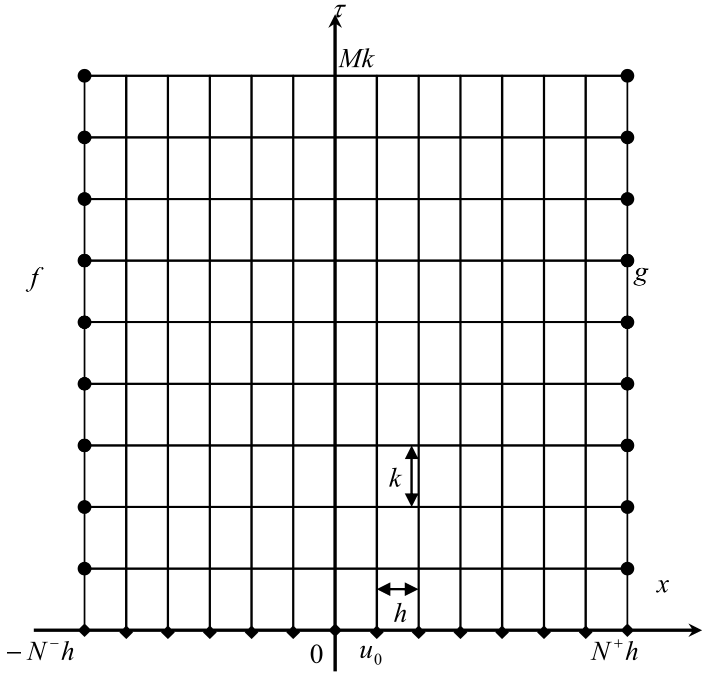

Fig.1. Rețeaua de discretizare

Aşadar, considerăm următoarea rețea de discretizare:

$$R'_{hk} = \left\{ (x_n, \tau_m) \ / \ x_n = nh,\ \tau_m = mk,\ -N^- \le n \le N^+,\ n \in \mathbf{Z},\ 0 \le m \le M,\ m \in \mathbf{N} \right\}$$

Rezolvarea problemei (*P*) prin metode numerice presupune ca în fiecare nod (x_n, τ_m) al acestei rețele să se găsească o soluție numerică $v(x_n, \tau_m)$, notată v_n^m, care să aproximeze valoarea exactă a soluției $u(x_n, \tau_m)$. Odată realizat acest lucru, pentru determinarea valorilor opțiunii este necesară utilizarea unor transformări, care sunt inversele transformărilor (1), (2) şi (3), pentru a se ajunge de la soluția ecuației de difuzie la soluția ecuației Black-Scholes.

3. Metoda Cranck - Nicolson

La metoda Cranck – Nicolson se utilizează formula

$$(1+\alpha)v_n^{m+1} - \frac{\alpha}{2}v_{n-1}^{m+1} - \frac{\alpha}{2}v_{n+1}^{m+1} = (1-\alpha)v_n^m + \frac{\alpha}{2}v_{n-1}^m + \frac{\alpha}{2}v_{n+1}^m \quad (9)$$

sau $(1+\alpha)v_n^{m+1} - \frac{\alpha}{2}v_{n-1}^{m+1} - \frac{\alpha}{2}v_{n+1}^{m+1} = z_n^m$ (10),

după efectuarea notației

$z_n^m = (1-\alpha)v_n^m + \frac{\alpha}{2}v_{n+1}^m + \frac{\alpha}{2}v_{n-1}^m$ (11), unde

$\alpha = \dfrac{k}{h^2}$.

Din condițiile la limită şi din condiția inițială dispunem de la început de valorile soluției în nodurile de pe frontieră situate pe laturile din dreapta, din stânga şi de jos (v. Fig. 1.). Astfel, din (6), (7) şi (8), la care se adaugă (10) obținem următorul program:

$$\begin{cases} (1+\alpha)v_n^{m+1} - \frac{\alpha}{2}v_{n-1}^{m+1} - \frac{\alpha}{2}v_{n+1}^{m+1} = z_n^m, & -N^- < n < N^+,\ 0 \le m < M \\ v_n^0 = u_0(nh), \quad -N^- \le n \le N^+ & \\ v_{-N^-}^m = f(-N^-h, mk), \quad 0 < m \le M & \\ v_{N^+}^m = g(N^+h, mk), \quad 0 < m \le M & \end{cases}$$

fiind necesar să determinăm valorile v_n^m, pentru $1 \le m \le M$, $-N^- < n < N^+$.

Relaţia (10) se scrie sub forma ecuaţiei matriceale $Cv^{m+1} = z^m$ (12), unde v^{m+1} este vectorul coloană cu componentele $v^{m+1}_{N^+-1}$, $v^{m+1}_{N^+-2},\ldots, v^{m+1}_0, \ldots, v^{m+1}_{-N^-+1}$; z^m este vectorul coloană cu componentele $z^m_{N^+-1}$, $z^m_{N^+-2},\ldots$, $z^m_0, \ldots, z^m_{-N^-+1}$;

$$C = \begin{pmatrix} 1+\alpha & -\alpha/2 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ -\alpha/2 & 1+\alpha & -\alpha/2 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha/2 & 1+\alpha & \ldots & 0 & 0 \\ . & . & . & \ldots & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1+\alpha & -\alpha/2 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -\alpha/2 & 1+\alpha \end{pmatrix} \tag{13}$$

Valorile soluţiei în nodurile unei linii a reţelei se calculează în funcţie de valorile soluţiei în nodurile din linia anterioară. Astfel, cu relaţia (11) se calculează z^m componentă cu componentă în funcţie de componentele lui v^m obţinut anterior. Apoi, cu z^m astfel determinat, se rezolvă sistemul $Cv^{m+1} = z^m$.
Fiind o metodă implicită, metoda Crank-Nicolson presupune rezolvarea unor sisteme de ecuaţii liniare, iar în acest scop se utilizează **metode directe** şi **metode iterative.** Din prima clasă vom folosi **algoritmul LU** şi **metoda Gauss**, iar dintre metodele iterative (care constau în construirea unui şir de vectori ce converge la soluţie) vom folosi **metoda Jacobi**, **metoda Gauss-Seidel** şi **metoda suprarelaxărilor succesive**.

3.1. Algoritmul LU

Teoremă. O matrice $A \in M_N(\mathbf{R})$ care îndeplineşte condiţiile $a_{11} \neq 0$, $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$, $\ldots, \det(A) \neq 0$, poate fi scrisă sub forma unui produs *LU*, unde *L* este matrice inferior triunghiulară, iar *U* matrice superior triunghiulară. În plus, descompunerea de mai sus este unică dacă elementele lui *L* sau *U* de pe diagonala principală sunt specificate.
În cazul în care matricea *A* este tridiagonală, descompunerea *A*= *LU* poate fi determinată imediat. Astfel, din ecuaţia matriceală

$$\begin{pmatrix} a_1 & c_1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ b_1 & a_2 & c_2 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & a_3 & \ldots & 0 & 0 \\ . & . & . & \ldots & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_{N-1} & c_{N-1} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & b_{N-1} & a_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ l_1 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & l_2 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ . & . & . & \ldots & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & l_{N-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 & z_1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & u_2 & z_2 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u_3 & \ldots & 0 & 0 \\ . & . & . & \ldots & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & u_{N-1} & z_{N-1} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & u_N \end{pmatrix}$$

obţinem

$$\begin{cases} u_1 = a_1,\ u_i = a_i - \dfrac{c_{i-1}b_{i-1}}{u_{i-1}},\ 2 \le i \le N & (14) \\ z_i = c_i,\ 1 \le i \le N\text{-}1 & (15) \\ l_i = \dfrac{b_i}{u_i},\ 1 \le i \le N\text{-}1 & (16) \end{cases}$$

Revenind la ecuaţia matriceală (12), se poate arăta că matricea *C* satisface condiţiile din teoremă. Mai mult, *C* fiind matrice tridiagonală, are loc o descompunere *LU* ca mai sus, pentru care dispunem de relațiile (14) – (16) cu

$a_i = 1+\alpha,\ 1 \le i \le N$ (17)

$b_i = c_i = -\frac{\alpha}{2},\ 1 \le i \le N-1$ (18)

Efectuând descompunerea $C = LU$, sistemul (12) devine $LUv^{m+1} = z^m$ iar pentru obținerea soluției lui, se rezolvă mai întâi prin substituție directă sistemul $Ly^m = z^m$ și se găsește soluția $\overline{y}^m$, iar apoi prin substituție inversă sistemul $Uv^m = \overline{y}^m$ determinând soluția căutată $\overline{v}^m$.

Așadar, pentru determinarea soluției, la iterația m ($1 \le m \le M$) să se parcurgă pașii următori:

Pasul 1. Se determină u_i pe baza relațiilor (14), (17) și (18), cu $N = N^+ + N^- - 1$.

Pasul 2. Se calculează componentele vectorului z^m cu ajutorul relației (11).

Pasul 3. Se determină $\overline{y}_i^m$ astfel:

$$\begin{cases} \overline{y}_1^m = z_N^m \\ \overline{y}_i^m = z_{N-i+1}^m - \dfrac{b_{i-1}\overline{y}_{i-1}^m}{u_{i-1}} = z_{N-i+1}^m + \dfrac{\alpha \overline{y}_{i-1}^m}{2u_{i-1}}, \qquad 2 \le i \le N \end{cases}$$

Pasul 4. Se determină $\overline{v}_i^m$ astfel:

$$\begin{cases} \overline{v}_{-N^-+1}^m = \dfrac{\overline{y}_N^m}{u_N} \\ \overline{v}_i^m = \dfrac{\overline{y}_{N-i+1}^m - z_{N-i+1}\overline{v}_{i-1}^m}{u_{N-i+1}} = \dfrac{2\overline{y}_{N-i+1}^m + \alpha \overline{v}_{i-1}^m}{2u_{N-i+1}}, \quad -N^- + 2 \le i \le N^+ - 1 \end{cases}$$

Așa cum rezultă din ultimele patru relații, sunt necesare doar mărimile u_i, nu z_i și l_i.

3.2. Metoda Gauss

Omitem indicele care marchează momentul de timp și scriem sistemul (12) sub forma

$$\begin{cases} a_1 v_{N^+-1} + c_1 v_{N^+-2} = z_{N^+-1} \\ b_1 v_{N^+-1} + a_2 v_{N^+-2} + c_2 v_{N^+-3} = z_{N^+-2} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ b_{j-1} v_{N^+-j+1} + a_j v_{N^+-j} + c_j v_{N^+-j-1} = z_{N^+-j} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ b_{N-1} v_{-N^-+2} + a_N v_{-N^-+1} = z_{-N^-+1} \end{cases}$$

unde $N = N^+ + N^- - 1$ și $a_i = 1+\alpha$, $i = \overline{1,N}$; $b_i = c_i = -\frac{\alpha}{2}$, $i = \overline{1,N-1}$. Cu prima ecuație se elimină v_{N^+-1} din a doua ecuație obținând o ecuație în v_{N^+-2} și v_{N^+-3}. Cu această ecuație se elimină v_{N^+-2} din ecuația a treia etc. Folosind penultima ecuație se elimină v_{-N^-+2} din ultima ecuație și se ajunge la o ecuație în v_{-N^-+1}. După determinarea lui v_{-N^-+1} din ultima ecuație, se găsesc și celelalte necunoscute cu ajutorul unui proces invers, plecând de la penultima ecuație. Se observă că în acest proces de eliminare coeficientul c_j se conservă. În etapa $j-1$ a procesului de eliminare, ecuația $j-1$ care a fost supusă procesului de eliminare și ecuația j care urmează să fie supusă acestui proces arată astfel:

$$\begin{cases} \beta_{j-1} v_{N^+-j+1} + c_{j-1} v_{N^+-j} = x_{j-1} \\ b_{j-1} v_{N^+-j+1} + a_j v_{N^+-j} + c_j v_{N^+-j-1} = z_{N^+-j} \end{cases}$$

După eliminarea lui v_{N^+-j+1} se obține

$\left(a_j - \dfrac{c_{j-1}b_{j-1}}{\beta_{j-1}}\right)v_{N^+-j} + c_j v_{N^+-j-1} = z_{N^+-j} - \dfrac{x_{j-1}b_{j-1}}{\beta_{j-1}}$, sau în mod formalizat $\beta_j v_{N^+-j} + c_j v_{N^+-j-1} = x_j$ (19), de unde rezultă relațiile de recurență

$$\begin{cases} \beta_j = a_j - \dfrac{c_{j-1}b_{j-1}}{\beta_{j-1}}, & j = 2,3, \ldots, N; \quad \beta_1 = a_1 \qquad (20) \\ x_j = z_{N^+-j} - \dfrac{x_{j-1}b_{j-1}}{\beta_{j-1}}, & j = 2,3, \ldots, N; \quad x_1 = z_N \qquad (21) \end{cases}$$

Odată eliminat v_{-N^-+2} din ultima ecuație, obținem $\beta_N v_{-N^-+1} = x_N$ (22), relație din care se determină v_{-N^-+1}.

Relația (19) este una generică, care permite determinarea variabilei v_{N^+-j} în funcție de variabila anterioară v_{N^+-j-1}.

Din ecuațiile (22) şi (19) se găseşte soluția sistemului inițial

$$\begin{cases} v_{-N^-+1} = \dfrac{x_N}{\beta_N} \\ v_{N^+-j} = v_{N-N^--j+1} = \dfrac{1}{\beta_j}\left(x_j - c_j v_{N^+-j-1}\right), \end{cases}$$

$j = N$ -1, N -2, ... , 2,1după ce β_j şi x_j au fost obținute în mod recursiv cu relațiile (20) şi (21).

3.3. Metoda Jacobi

Pentru un sistem liniar de n ecuații cu n necunoscute scris în formă matricială $Ax = b$, la metoda Jacobi soluția se iterează pe baza relației de recurență

$$x_i^{(l+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left[b_i - \sum_{j=1, j\neq i}^{n} a_{ij}x_j^{(l)}\right],$$

$$i = 1, 2, \ldots, n, \quad l = 1, 2, \ldots$$

Revenim la sistemul (12), a cărui matrice C este dată de (13) şi ai cărui termeni liberi sunt dați prin relațiile (11). Prin aplicarea procedeului iterativ Jacobi se construieşte un şir $v^{(1)}, v^{(2)}, \ldots, v^{(l)}, \ldots$, care aproximează pe v^{m+1}. Cu ajutorul relațiilor (11) se calculează componentele vectorului z^m folosind componentele vectorului v^m. Dacă omitem indicele care marchează momentul de timp, obținem următoarea schemă de iterație a metodei Jacobi

$$\begin{cases} v_{-N^-+1}^{(l+1)} = \dfrac{1}{\alpha+1}\left(z_{-N^-+1} + \dfrac{\alpha}{2}v_{-N^-+2}^{(l)}\right) \\ v_n^{(l+1)} = \dfrac{1}{\alpha+1}\left(z_n + \dfrac{\alpha}{2}v_{n-1}^{(l)} + \dfrac{\alpha}{2}v_{n+1}^{(l)}\right), \\ v_{N^+-1}^{(l+1)} = \dfrac{1}{\alpha+1}\left(z_{N^+-1} + \dfrac{\alpha}{2}v_{N^+-2}^{(l)}\right) \end{cases}$$

$$n = -N^- + 2, -N^- + 3, \ldots, 0, \ldots, N^+ - 2,$$

pentru l =1, 2, …

3.4. Metoda Gauss - Seidel

În cazul sistemului $Ax = b$, la metoda Gauss-Seidel avem formula de recurență

$$x_i^{(l+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(l+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(l)}\right),$$

$$i = 1,2,\ldots,n, \; l = 1,2,\ldots$$

Revenind la sistemul (12), după efectuarea calculelor se obțin următoarele relații:

$$\begin{cases} v_{-N^-+1}^{(l+1)} = \dfrac{1}{\alpha+1}\left(z_{-N^-+1} + \dfrac{\alpha}{2}v_{-N^-+2}^{(l)}\right) \\ v_n^{(l+1)} = \dfrac{1}{\alpha+1}\left(z_n + \dfrac{\alpha}{2}v_{n-1}^{(l+1)} + \dfrac{\alpha}{2}v_{n+1}^{(l)}\right), \\ v_{N^+-1}^{(l+1)} = \dfrac{1}{\alpha+1}\left(z_{N^+-1} + \dfrac{\alpha}{2}v_{N^+-2}^{(l+1)}\right) \end{cases}$$

$n = -N^- + 2, -N^- + 3, \ldots, 0, \ldots, N^+ - 2,$

pentru l =1, 2, …, care permit determinarea aproximărilor lui v^{m+1}.

3.5. Metoda suprarelaxărilor succesive

Pentru sistemul $Ax = b,$ vectorul care aproximează soluția în etapa l +1 este dat de relația

$$x^{(l+1)} = x^{(l)} + \omega\left(\overline{x}^{(l+1)} - x^{(l)}\right) = (1-\omega)x^{(l)} + \omega\overline{x}^{(l+1)}$$

unde $\overline{x}^{(l+1)}$ este aproximarea de ordin l + 1 obținută prin metoda Gauss-Seidel, iar ω o constantă, care se numeşte factor de relaxare. Pentru sistemul (12), aproximațiile lui v^{m+1} obținute prin acest procedeu sunt date de schema

$$\begin{cases} v_{-N^-+1}^{(l+1)} = \dfrac{\omega}{\alpha+1}\left(z_{-N^-+1} + \dfrac{\alpha}{2}v_{-N^-+2}^{(l)}\right) + (1-\omega)v_{-N^-+1}^{(l)} \\ v_n^{(l+1)} = \dfrac{\omega}{\alpha+1}\left(z_n + \dfrac{\alpha}{2}v_{n-1}^{(l+1)} + \dfrac{\alpha}{2}v_{n+1}^{(l)}\right) + (1-\omega)v_n^{(l)} \\ v_{N^+-1}^{(l+1)} = \dfrac{\omega}{\alpha+1}\left(z_{N^+-1} + \dfrac{\alpha}{2}v_{N^+-2}^{(l+1)}\right) + (1-\omega)v_{N^+-1}^{(l)} \end{cases}$$

$n = -N^- + 2, -N^- + 3, ..., 0, ..., N^+ - 2$, pentru l=1, 2, …

4. Concluzii

Rezolvarea numerică directă a ecuației Black-Scholes creează anumite dificultăți legate de modul de alegere a paşilor de discretizare, dar şi de aspecte privind convergența şi stabilitatea. De aceea, se efectuează acele transformări care conduc la ecuația de difuziune, ce se rezolvă numeric mult mai comod, iar dificultățile menționate mai devreme dispar.

Dintre metodele de rezolvare a ecuației de difuzie am optat pentru metoda Crank-Nicolson, întrucât este o metodă stabilă, cu o precizie destul de bună (rata de convergență fiind $O\left(h^2 + k^2\right)$), iar prin aplicarea ei se obține un sistem de ecuații a cărui matrice este tridiagonală. Totodată, implementarea relațiilor la care se ajunge prin metodele propuse pentru rezolvarea sistemului nu este dificilă. Întrucât pasul de discretizare de pe axa Ox trebuie să fie mic şi intervalul de discretizare mare, determinarea valorilor unei opțiuni implică utilizarea unor matrice de dimensiuni mari, ceea ce creează dificultăți datorită volumului mare de memorie utilizată.

Bibliografie

1. Hillier, B., Ibrahimo, M.V. – *The Performance of Credit under Asymmetric Information about Project Means and Variances*, Journal of Economic Studies, vol. 19, 1992, pp. 3-17
2. Morton, K.W., Mayers, D.F. – *Numerical Solution of Partial Differential Equations*, Cambridge, 1994
3. Manole, S. – *Numeric Methods of European Options Evaluations*, The Proceedings of the Sixth International Conference on Economic Informatics “Digital Economy”, Bucureşti, may 2003, pp. 607-611
4. Myerson, R. – *Optimal Auction Design*, Mathematics of Operations Research, vol. 5, 1981, pp. 58-73
5. Vickrey, W. – *Counterspeculation, Auctions and Competitive Sealed Tenders,* Journal of Finance, vol. 16, 1991, pp. 8-37
6. Wilmott, P. – *Derivative. Inginerie financiară*, Ed. Economică, Bucureşti, 2002