A Credibility Model for K Non-Life Insurance Contracts

Lect.dr. Virginia ATANASIU
Catedra de Matematică, ASE Bucureşti

Original paper which presents and analyses the estimators of the structural parameters in the Bühlmann-Straub model, involving complicated mathematical properties of conditional expectations and of conditional covariances. So, to be able to use the better linear credibility results obtained in this model, we will provide useful estimators for the structure parameters. From point of view practical, is stated the attractive property of unbiasedness for these estimators. The first section contains a description of the model. In this section we will give the assumptions of the Bühlmann-Straub model and the optimal linearized credibility premium is derived. In section 2 we give unbiased estimators foe the structure parameters, such that if the structure parameters in the optimal linearized credibility premium are replaced by these estimators, a homogeneous estimator results. This last estimator can also be shown to be optimal.
Keywords: *the structural parameters, heterogeneity, observable variables, unbiased estimators and unbiased pseudo-estimators.*

Secţiunea 1

Modelul Bühlmann-Straub constă din k tipuri de contracte de asigurare non-viaţă sau vizează un portofoliu eterogen de k tipuri de contracte de asigurare non-viaţă. În continuare realizez o descriere din punct de vedere probabilistic a acestui model.

Contractele $j=\overline{1,k}$ implicate de modelul Bühlmann –Straub le-am reprezentat din punct de vedere probabilistic sub forma vectorilor aleatori bidimensionali de componente θ_j şi $\underline{X}_j^{'}$, unde: - prima componentă a vectorului, adică θ_j este parametrul de risc aleator neobservabil din contractul $\boxed{j}$,deci variabila aleatoare reală ce descrie caracteristicile riscului luat în consideraţie pentru poliţa $\boxed{j}$, iar: - a doua componentă a vectorului, adică $\underline{X}_j^{'}$ este vectorul t-dimensional (1x t) aleator al observaţiilor $X_{jr}, r=\overline{1,t}$ efectuate pe durata a t (≥ 2) ani asupra contractului $\boxed{j}$ şi anume: $\underline{X}_j^{'}=(X_{j1},X_{j2},...,X_{jt})$,deci : $\underline{X}_j^{'}$ indică observaţiile efectuate pe durata a t (≥ 2) ani asupra poliţei $\boxed{j}$, iar $X_{j1},X_{j2},...,X_{jt}$ sunt variabilele aleatoare observabile ale contractului j sau $X_{j1},X_{j2},...,X_{jt}$ reprezintă înregistrările din anii 1,2,…,t pentru contractul $\boxed{j}$, sau încă $X_{j1},X_{j2},...,X_{jt}$ semnifică mărimile solicitărilor (cifrele pretenţiilor) de despăgubire din anii 1,2,…,t pentru contractul $\boxed{j}$; am presupus, aşadar, că dispunem de înregistrările solicitărilor de despăgubire pe t (≥ 2) ani pentru contractul $\boxed{j}$, cu $j=\overline{1,k}$.

Prin urmare, contractul $\boxed{j}$ l-am identificat cu perechea (cuplul, vectorul aleator bidimensional de componente: $\theta_j \wedge \underline{X}_j^{'}$ (ale căror semnificaţii le-am prezentat anterior),unde $j=\overline{1,k}$.

Deci: (contractul $\boxed{j}$)=$\left(\theta_j,\underline{X}_j^{'}\right)$, cu $j=\overline{1,k}$.

Ipotezele de lucru pentru modelul Bühlmann-Straub sunt: (BS_1) Contractele $j=\overline{1,k}$, adică perechile, cuplurile, vectorii aleatori bidimensionali $\left(\theta_j,\underline{X}_j^{'}\right)$, unde $j=\overline{1,k}$(prin care am reprezentat contractele) sunt independente [fiecare contract este independent de oricare alt contract], adică $\left(\theta_j,\underline{X}_j^{'}\right)$ este independent de $\left(\theta_{j^{'}},\underline{X}_{j^{'}}^{'}\right)$, oricare ar fi $j,j^{'}=\overline{1,k}$, cu $j\neq j^{'}$.

(BS_2) Pentru fiecare contract j şi pentru θ_j dat, variabilele aleatoare observabile $X_{j1},X_{j2},...,X_{jt}$ sunt independente condiţional, adică variabilele aleatoare condiţionate

$(X_{jr} \mid \theta_j)$ cu $r = \overline{1,t}$ sunt independente , oricare ar fi $j = \overline{1,k}$.

(BS_3) Variabilele de structură ale contractelor, adică $\theta_1, \theta_2, ..., \theta_k$ sunt identic distribuite.

(BS_4) Toate observațiile anuale efectuate asupra contractului j, adică $X_{j1}, X_{j2}, ..., X_{jt}$ au varianța finită, oricare ar fi $j = \overline{1,k}$. Deci: $0 < Var(X_{jr}) < \infty$, oricare ar fi $r = \overline{1,t} \wedge j = \overline{1,k}$

(BS_5) Toate contractele $j = \overline{1,k}$ au în comun faptul că mediile lor sunt exprimate prin aceeaşi funcție notată cu $\mu(\cdot)$ independentă de r, $r = \overline{1,t}$, de timp (de anul observației), dar dependentă de variabilele aleatoare structurale corespunzătoare, adică de parametrii de risc corespunzători $\theta_j, j = \overline{1,k}$, sau altfel formulând: — prima netă de risc a contractului $\boxed{j}$ de parametru θ_j este definită ca media condiționată (de θ_j) a observațiilor anuale efectuate asupra contractului $\boxed{j}$ şi este notată printr-o funcție $\mu(\cdot)$, depinzând de θ_j, dar independentă de r, $r = \overline{1,t}$.

Deci: $\boxed{\mu(\theta_j) = M(X_{jr} \mid \theta_j), \forall r = \overline{1,t}}$

(BS_6) Varianțele observațiilor anuale condiționate efectuate la nivelul contractului $\boxed{j}$ sunt date de următoarea egalitate:

$$\boxed{Var(X_{jr} \mid \theta_j) = \frac{\sigma^2(\theta_j)}{w_{jr}}, \forall r = \overline{1,t}},$$

cu toți $w_{jr} > o$. (De notat, faptul că variabilele aleatoare observabile $X_{jr}, j = \overline{1,k}, r = \overline{1,t}$ din modelul Bühlmann-Straub indică media aritmetică a w_{jr} contracte de parametru θ_j din modelul clasic Bühlmann grupate împreună la momentul r, după cum urmează: $\boxed{X_{jr} = \frac{1}{w_{jr}} \sum_{i=1}^{w_{jr}} X_{jr}^{(i)}}$ unde $X_{jr}^{(i)}, i = \overline{1, w_{jr}}$ satisfac ipotezele $(BS_1^{'}) - (BS_6^{'})$; $[(BS_1^{'}) - (BS_6^{'})]$ sunt analoagele lui $(BS_1) - (BS_6)$ în aceste variabile, cu mențiunea următoare pentru $(BS_6^{'})$:

$(BS_6^{'})$ $Var(X_{jr}^{(i)} \mid \theta_j) = \sigma^2(\theta_j), \forall r = \overline{1,t}$ „toate contractele din modelul clasic Bühlmann au în comun faptul că varianțele lor sunt exprimate prin aceeaşi funcție $\sigma^2(\cdot)$ independentă de $r, r = \overline{1,t}$, dar dependentă de parametrii de risc corespunzători, adică de θ_j, cu $j = \overline{1,k}$”).

Observații:

1) Să remarcăm faptul următor:

$$\boxed{Cov(X_{jr}, X_{jq} \mid \theta_j) = 0, \forall r, q = \overline{1,t}}$$

cu r<q, egalitate ce apare ca o consecință imediată a lui (BS_2) şi ce exprimă că: „observațiile condiționate efectuate asupra contractului $\boxed{j}$ de parametru θ_j în ani diferiți nu sunt corelate “, deoarece covarianța observațiilor condiționate efectuate asupra contractului $\boxed{j}$ în ani diferiți este nulă,consecință firească a faptului că aceste variabile aleatoare condiționate sunt independente.

2) Pentru fiecare contract $\boxed{j}(= \overline{1,k})$ rezultă următoarea matrice de covarianțe a observațiilor condiționate efectuate asupra contractului j de parametru θ_j pe durata a t ani şi anume:

$$\boxed{Cov(\underline{X}_j^{'} \mid \theta_j) = I^{(t,t)} \sigma^2(\theta_j), \forall j = \overline{1,k}}$$

Pe baza ipotezelor $(BS_1) - (BS_6)$ **formulate de Bühlmann-Straub şi a parametrilor structurali, definiți** de actuari după cum urmează:

1) $m = M[\mu(\theta_j)] = M(X_{jr}), \forall j, \forall r$ $\leftarrow$ prima netă globală de risc, ce indică estimatorul colectiv pentru $\mu(\theta_j)$;

2) $s^2 = M[\sigma^2(\theta_j)], \forall j$ $\leftarrow$ media varianței observațiilor condiționate efectuate asupra contractului j, ce indică gradul de fluctuație al contractului individual;

3) $a = Var\lfloor\mu(\theta_j)\rfloor, \forall j$ ←varianța primei nete a contractului j, ce indică gradul de variabilitate dintr-un contract,am obținut folosind metoda celor mai mici pătrate, rezultatele liniare şi neomogene de credibilitate de la nivelul contractului, în speță primele liniare şi neomogene de credibilitate de la nivelul contractului, pe care le ilustrez în continuare: „Estimatorul liniar şi neomogen de credibilitate pentru prima netă de risc $\mu(\theta_j)$ a contractului $\boxed{j}$, bazat pe $\underline{X}_j^{'}$ (adică pe observațiile sau înregistrările individuale efectuate asupra contractului $\boxed{j}$), notat $\hat{\mu}(\theta_j)$ este: $\boxed{\hat{\mu}(\theta_j) = z_j M_j + (1 - z_j)m = M_j^a}$, unde $\boxed{M_j = X_{jw} = \sum_{q=1}^{t} \frac{w_{jq}}{w_{j.}} X_{jq}}$=(media aritmetică ponderată pentru contractul $\boxed{j}$), ce indică estimatorul individual pentru $\mu(\theta_j)$, iar $\boxed{z_j = \frac{aw_{j.}}{aw_{j.} + s^2}}$ = (reprezintă factorul de credibilitate pentru contractul $\boxed{j}$), adică o pondere a înregistrărilor individuale pentru contractul $\boxed{j,}$ ce indică de câtă credibilitate se bucură acestea, cu $j = \overline{1,k}$."

Expresia pe care am obținut-o pentru prima liniară şi neomogenă a contractului $\boxed{j}$ apare ca o combinație liniară convexă între estimatorul individual al lui $\mu(\theta_j)$ (reprezentat de M_j) şi estimatorul colectiv al lui $\mu(\theta_j)$ (reprezentat de **m**), unde $j = \overline{1,k}$. Conchidem, afirmând despre modelul Bühlmann-Straub că s-au folosit atât observațiile disponibile la nivelul individual, cât şi cele disponibile la nivelul global (adică la nivelul colectivului).

Secțiunea 2.

Pentru **a putea aplica în practică primele liniare şi neomogene de credibilitate** obținute în cadrul modelului Bühlmann-Straub, am construit **estimatori ai parametrilor structurali necunoscuți**, ce figurează în expresiile acestor prime şi **am relevat din perspectiva prelucrării statistice a datelor experimentale calitățile** pe care aceştia le posedă şi anume **nedeplasarea.**

Pentru „ **m** " variabila aleatoare: $\hat{m} = M_0 = X_{zw} = \sum_{j=1}^{k} \frac{z_j}{z_.} X_{jw} (z_. \overset{not}{=} \sum_{j=1}^{k} z_j)$, ce are calitatea că: $\boxed{M(\hat{m}) = m}$.

Pentru „s^2"variabila aleatoare: $\hat{s}^2 = \frac{1}{k(t-1)} \sum_{j,s} w_{js} (X_{js} - X_{jw})^2$, ce are calitatea că: $\boxed{M(\hat{s}^2) = s^2}$.

Pentru „**a**"variabila aleatoare:

$$\hat{a} = w_{..}\left[\sum_j w_{j.}(X_{jw} - X_{ww})^2 - (k-1)\hat{s}^2\right] / (w_{..} - \sum_j w_{j.}^2), (w_{..} = \sum_1^k w_{j.} = \sum_{j=1}^{k}\sum_{q=1}^{t} w_{jq}, \; X_{ww} = \sum_{j=1}^{k} \frac{w_{j.}}{w_{..}} X_{jw})$$

, cu $\boxed{M(\hat{a}) = a}$.

Observații:

1) Deoarece $\hat{a}$ prezintă inconvenientul că poate lua şi valori negative, în timp ce „a" este nenegativ, am înlocuit pe „a" cu $a^* = \max(0, \hat{a})$,estimator care îşi pierde calitatea de a fi nedeplasat pentru „a", dar care obține acceptabilitatea (câştigă admisibilitatea).

2) Dacă„ a "se estimează cu a^*,atunci z_j se poate estima cu: $\hat{z}_j = \frac{a^* w_{j.}}{\hat{s}^2 + a^* w_{j.}}$. Inserând estimatorii $\hat{z}_j$ si $\hat{m} = M_0$ în prima de credibilitate $\hat{\mu}(\theta_j)$,se obține prima empirică de credibilitate: $M_j^a = (1 - \hat{z}_j)\hat{m} + \hat{z}_j \hat{M}_j$, care este aşa după cum se poate constata, o combinaţie liniară şi neomogenă a tuturor variabilelor aleatoare observabile. În cazul folosirii acestei formule, se observa că $M(M_j^a) \neq m$, deoarece $\hat{z}_j$ este dependent de $M_0(=\hat{m})$ şi de M_j. Aşadar proprietatea atractivă din punct de vedere practic a lui M_j^a şi anume caracterul nedeplasat este pierdut, dar încă ne putem aştepta ca estimatorii rezultaţi să fie buni.

3) Rezultatul $\hat{\mu}(\theta_j)$ şi estimatorii $\hat{m}, \hat{s}^2, a^*$ conduc la soluţia modelului Bühlmann-Straub, în cazul unui estimator optim (adică de credibilitate) liniar şi neomogen pentru $\mu(\theta_j)$.

4) La estimarea lui „m” s-a utilizat X_{zw} şi nu X_{ww}, deoarece $Var(X_{zw}) \leq Var(X_{ww})$.

5) Se poate releva şi alt estimator, de asemenea nedeplasat pentru parametrul structural „a”, care este mai precis un pseudo-estimator, deoarece definiţia lui conţine pe însuşi „a”, adică pe însuşi parametrul ce urmează a fi estimat. Pseudo-estimatorul parametrului de structură „a”este următoarea variabilă aleatoare de structură: $\hat{a} = \frac{1}{k-1}\sum_{j=1}^{k} z_j (M_j - M_0)^2$, ce are calitatea că este nedeplasat pentru „a”, ceea ce înseamnă că $\boxed{M(\hat{a}) = a}$. Motivul luării în considerare a estimatorului $\hat{a}$ de mai sus rezidă în aceea că $\hat{a}$ prezentat mai devreme împreună cu $\hat{s}^2$ **reflectă mai bine** decât $\hat{a}$ şi $\hat{s}^2$ **gradul de eterogenitate**. Deci, **folosirea primelor liniare şi neomogene de credibilitate este posibilă numai dacă înlocuim parametrii necunoscuţi implicaţi de ele cu estimaţiile acestora prezentate mai înainte.**

6) Dacă parametrul „**m**” din $M_j^a = z_j M_j + (1 - z_j)m$ este estimat prin M_0 atunci formula rezultantă pentru $\hat{\mu}(\theta_j)$ reprezintă **o combinaţie liniară a tuturor variabilelor observabile**, ce are pe de o parte calitatea de a fi o **estimaţie nedeplasată a lui „m”,** iar pe de altă parte are meritul de a oferi **rezultatul liniar şi omogen de credibilitate**.

Bibliografie

[1] Atanasiu V., *Contribuţii la teoria credibilităţii,* teză de doctorat, Capitolul 8, Universitatea Bucureşti, Facultatea de Matematică, 2000.

[2] Goovaerts M.S., Kass R., Van Heerwaarden A.E., Bauwelinckx T., *Insurance Series, Volume 3, Efective Actuarial Methods,* University of Amsterdam, The Nederlands, 1991.

[3] Pentikainen T., Daykin C.D., Pesonen M., *Practical Risk Theory for Actuaries,* Universite Pierre et Marie Curie, 1990.

[4] Sundt B., *An Introduction to Non-Life Insurance Mathematics,* Veröffentlichungen des Instituts fur Versicherungswissenschaft der Universität Mannheim Band 28,(V V W Karlsruhe), 1990.