Financial Aspects of the Dynamic Optimization at Macroeconomic Level

Prof.dr. Stelian STANCU
Catedra de Cibernetică Economică, A.S.E. Bucureşti

The paper makes a short introduction into the consequences of some aspects of financial politics over the dynamic optimization at macroecnomic level.
In this context, based on examples, we present the optimum credit problem, the fiscal politics problem, the optimal consumption trajectory and essential aspects concerning sconting and depreciation in the continuos time models.
***Keywords**: macroeconomics, aggregate income, aggregate consumption, private investments, financial, dynamic optimization, optimal credit, fiscal politics, aconting, depreciation.*

Fie un model dinamic simplificat la nivel macroeconomic, pentru care se notează cu *y*, *C* şi *I* , venitul agregat, consumul agregat şi respectiv investiţiile private la nivelul economiei. Ca urmare, un model macroeconomic simplu (fără existenţa guvernului-statului ca agent economic) de determinare a venitului este dat de: $C = cy$ (1) şi $C + I = y$ (2). Prima relaţie este o funcţie simplă de consum, cu *c* semnificând înclinaţia marginală spre consum, în timp ce a doua relaţie reprezintă condiţia de echilibru. Fiind dată o valoare exogenă pentru *I*, valorile de echilibru pentru *y* şi *C* pot fi determinate atâta timp cât *y* nu depăşeşte un nivelul maxim posibil(nivelul potenţial), definit ca *Y* în continuare. *Y* depinde de nivelul fondului de capital, *K*, printr-o funcţie de producţie: $y \le Y = f(K)$ (3).

Se presupune în continuare, de asemenea, că venitul agregat este la nivelul celui potenţial($y = Y$) şi că investiţiile sunt egale cu nivelul maxim al economiilor, $I = (1-c)Y$, de unde se poate deduce faptul că economiile vor atinge nivelul maxim. Pentru a obţine un model de creştere se egalează rata netă de creştere a fondului de capital cu investiţiile, adică: $\dot{K} = I$ (4).

Ecuaţiile (1) – (4), cu *Y* în loc de *y*, constituie un model simplu de creştere, cu toate variabilele evaluate la acelaşi moment de timp, argumentul timp fiind astfel eliminat pentru simplificare notaţiei.

Într-un astfel de model nu se mai află valorile echilibrului static, ci se determină forma funcţională a variabilelor în funcţie de *t*. Pentru aceasta se reduc ecuaţiile (1)-(4) la o ecuaţie diferenţială în *K*: (1) – (4) devine $I = Y - C = (1-c)Y = (1-c)f(K)$, şi ţinând cont de relaţia (4) obţinem: $\dot{K} = (1-c)f(K)$ (5). Această ecuaţie poate fi rezolvată în raport cu *K* dacă forma funcţionalei $f(K)$ este specificată şi dacă este precizată o condiţie iniţială, $K(0) = K_0$.

1. Creditul optim

În continuare luăm în considerare posibilitatea unui împrumut, având drept consecinţă creşterea fondului de capital. Fie mărimea împrumutului *H*, cu o rată a dobânzii *r*. Suma care trebuie plătită la data de expirare a creditului, *T*, este He^{rT}. De asemenea, în continuare vom folosi funcţia de producţie $Y = \frac{K^\alpha}{(1-\alpha)}, 0 < \alpha < 1$ şi condiţia iniţială $K(0) = K_0$. Dacă preţul unitar al capitalului este 1 la orice moment de timp, atunci la începutul perioadei de analiză valoarea totală a capitalului8existent plus cel împrumutat) este egală cu $K_0 + H$ unitaţi de capital. *H* trebuie ales astfel încât să maximizeze nivelul capitalului disponibil la momentul *T,* după ce creditul a fost înapoiat. Ecuaţia diferenţială (5) ia forma: $\dot{K} = \frac{(1-c)}{(1-\alpha)} K^\alpha$ sau echivalent

$\frac{\dot{K}}{K^{\alpha}}(1-\alpha)=(1-c)$ (6). Aplicând integrala, obținem: $\int \frac{1}{K^{\alpha}}(1-\alpha)dK=\int(1-c)dt$, de unde $K^{1-\alpha}=(1-c)t+\overline{K}$, cu $\overline{K}$ constantă de integrare (7). Dacă este împrumutată suma *H*, condiția inițială este $(K_0+H)^{1-\alpha}=\overline{K}$ (8). Deci $K(t)=\left[(1-c)t+(K_0+H)^{1-\alpha}\right]^{1/(1-\alpha)}$ (9) este soluția pentru $0\le t<T$. La momentul *T* creditul este înapoiat, iar ceea ce ramâne este $\left[(1-c)T+(K_0+H)^{1-\alpha}\right]^{\alpha/(1-\alpha)}(K_0+H)^{-\alpha}-He^{rT}$ (10), și ridicând la puterea $(1-\alpha)/\alpha$ în ambii membri, obținem: $(1-c)T\cdot(K_0+H)^{\alpha-1}=e^{rT(1-\alpha)/\alpha}-1$ și, în final $H^{*}=\left[\frac{(1-c)T}{e^{rT(1-\alpha)/\alpha}-1}\right]^{1/(1-\alpha)}-K_0$ (11).

Acesta se presupune că este împrumutul maxim ce poate fi făcut. De menționat faptul că *H* poate fi negativ, având semnificația de depuneri la trezoreria statului etc. Înlocuind (11) în (10) rezultă valoarea capitalului rămas după înapoierea împrumutului:

$$K^{*}(T)=e^{rT}\left[K_0+\left[(1-c)T\right]^{1/(1-\alpha)}\left[e^{rT(1-\alpha)/\alpha}-1\right]^{-\alpha/(1-\alpha)}\right]$$

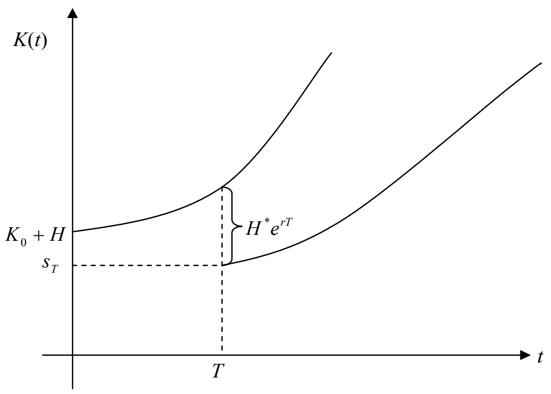

Figura 1.

Pentru a obține soluția în cazul $t>T$, nu trebuie numai să scădem $H^{*}e^{rT}$ din (9), ci este necesar să folosim $K^{*}(T)$ ca fiind noua condiție la limită și să determinăm din nou constanta *A* în (7). Aceasta implică schimbarea traiectoriei la momentul *T*, după cum se poate observa în Figura 1. Acest lucru mărește importanța specificării corecte a condițiilor la limită.

2. Politica fiscală

Vom presupune în continuare că statul intervine percepând impozite și taxe sau acordând subvenții și subsidii. Venitul din impozite, obținut la nivelul statului, se presupune că este reinvestit. Modelul devine $C=c(1-\gamma)Y$ (12), $G=\gamma Y$ (13), $Y=\frac{K^{\alpha}}{(1-\alpha)}, 0<\alpha<1$ (14), $C+I+G=Y$ (15), $\dot{K}=I+G$ (16), unde γ este procentul de impozitare pentru valori pozitive sau de subvenții pentru valori negative, $(1-\gamma)Y$ este venitul disponibil, *G* este venitul guvernamental sau investiția publică, iar *I* este investiția privată. Luând pentru simplificarea calculelor $\alpha=0.5$, se obține ecuația diferențială $\dot{K}=2K^{1/2}(1-c+c\gamma)$ (17), care este rezolvată și se obține $K(t)=\left[(1-c+c\gamma)t+K_0^{1/2}\right]^2$ (18), unde $K(0)=K_0$ dat.

Se presupune în continuare că obiectivul guvernului este maximizarea consumului total în intervalul de timp [0,*T*]. Atunci problema guvernului este de a alege γ astfel încât să maximizeze

$$W=\int_0^T C(t)dt=\int_0^T 2c(1-\gamma)\left[(1-c+c\gamma)t+K_0^{1/2}\right]dt \quad (19)$$
$$=c(1-\gamma)\left[(1-c+c\gamma)T^2+2K_0^{1/2}T\right]$$

Valoarea optimă a lui γ este găsită impunând condiția necesară de optim $dW/d\gamma=0$, ceea ce duce la

$\gamma=1-\frac{2K_0^{1/2}+T}{2cT}=1-\frac{2K_0^{1/2}T^{-1}+1}{2c}$ (20), (este ușor de verificat faptul că $d^2W/d\gamma^2=-2c^2T^2<0$, adică este îndeplinită și condiția suficientă de optim). În continuare, vom prezenta efectul mărimii intervalului de timp asupra parametrului politicii fiscale, γ. Din relația (20) rezultă clar că γ este o funcție crescătoare în raport cu *T*. Din relația (20) se deduce că $\gamma=(T-4)/3T$, de unde se obține că $Y(t)=2\left[(1-c+c\gamma)t+K_0^{1/2}\right]=t(T-2)/T+2$, și $\dot{K}=(1-c+c\gamma)Y=Y(T-2)/2T$ după ce se face înlocuirea. Dacă $T = 5$, avem $\gamma = \frac{1}{15}$ şi $Y(t) = 0.6t + 2$, ceea ce conduce la concluzia că politica guvernamentală creşte investiţiilor nete. Dacă $T = 3$, avem $\gamma = -\frac{1}{9}$ şi $Y(t) = t/3 + 2$, ceea ce conduce la concluzia că politica guvernamentală duce la scăderea investiţiilor nete, dar acestea sunt încă pozitive deoarece $I + G = \dot{K} = \frac{1}{6}Y$. Pentru un interval mare de timp, $T \to \infty, \gamma \to \frac{1}{3}$ şi $Y(t)$ devine $t + 2$. Aceasta este cea mai mare rată de impozitare şi cea mai rapidă rată de creştere a venitului. Economiile duc la scăderea consumului curent în favoarea invetiţiilor în capital, ceea ce va duce la un venit mai mare, deci, pe viitor, la un consum mai mare. Mărimea orizontului de planificare poate, deci, avea un efect major asupra politicilor. În final, dacă $T = 1$, avem $\gamma = -1$ şi $Y(t) = -t + 2$. În acest caz înclinaţia spre economii se răstoarna astfel încât investiţiile nete devin negative ($\dot{K} = -Y$), iar rata de creştere a venitului este negativă. Acest lucru ridică problema utilizării capitalului anterior pentru a genera consum curent (reversibilitatea investiţiilor).

3. Traiectoria suboptimală a consumului

Revenim la modelul fară sector guvernamental şi alegem $f(K) = 4K; K(0) = 1$. Atunci, ecuaţia (5) devine $\dot{K} = 4(1-c)K, \quad K(0) = 1$ (21). Obiectivul este de a maximiza utilitatea într-un anumit interval, $[0,T]$, $\int_0^T U(C(t))dt$. Luând $U(C(t)) = \ln C(t)$ şi $T = 1$, trebuie să maximizăm $V = \int_0^1 \ln C(t)dt$ (22), unde $C(t) = 4cK(t)$. Rezolvând (21) rezultă că $K(t) = e^{4(1-c)t}$ şi $C(t) = 4ce^{4(1-c)t}$. Când aceasta este înlocuită în (22), trebuie să-l alegem pe c pentru a maximiza $[\max_c] V(c) = \int_0^1 [\ln 4c + 4(1-c)t]dt$ (23) sau echivalent $[\max_c] V(c) = \ln 4c + 2(1-c)$ (24).

Aplicând condiţia necesară de optim, se obţine că $c = 0.5$ şi avem $K^*(t) = e^{2t}, C^*(t) = 2e^{2t}$ şi $V^* = \ln 2 + 1 \approx 1.69$. Reflectând asupra optimalităţii acestei proceduri – în particular, faptul că înclinaţia spre consum, c, a fost constantă pe tot parcursul intervalului, avem:

- Dacă c ce ar varia în timp, acest lucru ar duce la mărirea integralei maximizate (în caz că ar avea vreun efect). În acest sens, soluţia de mai sus este suboptimală.
- Cu înclinaţia spre consum luată ca variabilă, problema se transformă în a alege $c(t)$ pentru a maximiza $[\max_{c(t)}] \int_0^1 \ln\left[4c(t)K(t)\right]dt$ (25), pe restricţia: $\dot{K}(t) = 4(1-c(t))K(t)$ (26), la care se adaugă condiţiile la limită pentru K, unde $c(t)$ este o funcţie de timp necunoscută. Este clar atunci că nu este posibilă rezolvarea ecuaţiei (26), deoarece nu cunoaştem forma lui $c(t)$. Ca urmare, rezolvând problema de optim dată de relaţiile (25)-(26) şi condiţiile la limită pentru K, se determină $c^*(t)$.

4. Scontarea şi deprecierea în modelele pe caz continuu

Conceptul de rată a dobânzii este esenţial pentru modelele economi-ce dinamice. Notând rata dobânzii pe o perioadă cu r, putem defini valoarea prezentă P a unei sume, spre exemplu în euro, A, care trebuie plătită peste T perioade. Simplificat, avem că $P(1+r)^T = A$ sau $P = \frac{A}{(1+r)^T}$ (27). Aceasta presupune că dobânda este adăugată în fiecare perioadă, deci, reinvestită după fiecare perioadă. Dacă dobânda este de fapt adăugată, să zicem, de n ori în decursul unei perioade, vom avea nT subperioade, fiecare având o dobândă de $\frac{r}{n}$. Atunci valoarea prezentă a lui A este $P = \frac{A}{\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nT}}$ (28). Dacă adăugarea are loc din ce în ce mai frecvent, $n \to \infty$ şi ştiind că $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e$, rezultă că

$$\lim_{\frac{n}{r}\to\infty} P = \lim_{\frac{n}{r}\to\infty} \frac{A}{\left[\left(1+\frac{n}{r}\right)^{n/r}\right]^{rT}} = Ae^{-rT}.$$

De aceea, după cum dobânda este adăugată continuu, formula valorii prezente devine $P = Ae^{-rT}$ (29), unde r este rata dobânzii pe perioadă de timp iar T este numărul de perioade.

În modelele pe caz continuu, adică atunci când variabila timp ia valori reale, ecuaţia (29) ne furnizează un mod comod de a calcula valorile prezente. De subliniat faptul că folosirea formulei discaunt-ului exponenţial nu presupune că dobânda este adăugată la fiecare moment, ci trebuie doar să presupunem că efectuarea calculelor are loc pentru t număr real şi că r este rata dobânzii reale calculată pe baza adăugării continue.

O rată a dobânzii reală pozitivă poate fi găsită în majoritatea economiilor care operează aproape de ocupare totală. Deci, existenţa sa nu este adesea o problemă. Mai mult, i se poate da o justificare teoretică clară folosind argumentul că procesul de producţie durează în timp şi nevoia unui utilaj de producţie sau a banilor pentru cumpărarea sa trebuie să atragă un împrumut economic.

Astfel, dacă obiectivul este exprimat în bani, atunci pare natural utilizarea unui factor de discaunt. De exemplu, dacă profitul net la momentul t este $\pi(h(t),t)$, unde h este variabila care ţine de respectiva politică(decizia luată), valoarea sa prezentă ar fi $e^{-rT}\pi(h(t),t)$, iar valoarea totală prezentă a profiturilor pe intervalul de timp [0, T], va fi $\int_0^T e^{-rT}\pi(h(t),t)dt$. Folosim discaunt-ul şi din alte considerente. De exemplu, dacă obiectivul este nivelul utilităţii, aplicăm discaunt-ul folosind aceeaşi formă exponenţială, dar rata discaunt-ului este de data aceasta subiectvă. De exemplu, dacă nivelul utilităţii la momentul t este dat de $u(h(t),t)$, atunci valoarea totală prezentă a utilităţii pe intervalul de timp [0, T] este dată de $\int_0^T e^{-\delta t}u(h(t),t)dt$ (aici, δ reprezintă rata subiectivă de discaunt). Astfel de criterii de utilitate sunt folosite în literatura optimizării economice dinamice, existând câteva critici referitoare la acest aspect.

Revenind la modelul din secţiunea precedentă, vom justifica cum introducerea unei rate negative de discaunt va duce la un consum relativ ridicat la începutul perioadei de analiză şi un consum relativ scăzut spre sfârşitul aceleiaşi perioade.

Avem astfel următoarea problemă de optim:

$$[\max_c] V(c) = \int_0^1 [\ln 4c + 4(1-c)t]e^{-\delta t}dt$$
$$= \ln 4c\left[-\frac{1}{\delta}e^{-\delta t}\right]_0^1 + 4(1-c)\left[-\frac{t}{\delta}e^{-\delta t} - \frac{e^{-\delta t}}{\delta^2}\right]_0^1 \quad (30)$$
$$= (\ln 4c)\left(\frac{1-e^{-\delta}}{\delta}\right) + \frac{4(1-c)}{\delta^2}\left[1-e^{-\delta}(\delta+1)\right]$$

Pentru a maximiza V în (30), se impune condiţia necesară de optim $\frac{\partial V}{\partial c} = \left(\frac{1-e^{-\delta}}{\delta}\right)\frac{1}{c} - \frac{4}{\delta^2}\left(1-e^{-\delta}(\delta+1)\right) = 0$, de unde $c = \frac{\delta(e^{\delta}-1)}{4(e^{\delta}-(1+\delta))}$. (31)

Se poate arăta că $\lim_{\delta\to 0+} c = 0.5$, dar valori pozitive ale lui δ vor duce la valori mai mari pentru c(adică funcţia c este crescătoare în raport cu δ).

Pentru exemplificare, luând $\delta = 0.5$ rezultă că $c = 0.5453$. De aici, $\hat{C}(t) \approx 2.172e^{1.1819t}$ în loc de $C^*(t) = 2e^{2t}$ fară discaunt.

Se verifică astfel că $\hat{C}(0) = 2.172 > C^*(0)$, în timp ce $\hat{C}(1) = 13.39 < 14.78 = C^*(1)$.

Deprecierea

Dacă o sumă de bani P este investită prin adăugare continuă la o rată a dobânzii r, va creşte până la Pe^{rT} după t perioade de timp.

Acesta este cazul oricărui stoc de bunuri care creşte cu o rată constantă *r*, dacă la momentul(perioada) zero are valoarea $K(0)$, acesta va creşte la $K(t) = K(0)e^{rt}$ dupa *t* perioade. Dacă stocul de capital scade sau se depreciază în loc să crească, atunci stocul de capital va scade după formula $K(t) = K(0)e^{-\rho t}$, unde $\rho > 0$ este rata de depreciere. Putem exprima acest fenomen ca fiind o ecuație diferențială: $\dot{K}(t) = K(0)(-\rho e^{-\rho t}) = -\rho K(0)e^{-\rho t} = -\rho K(t)$ astfel încât $\dot{K} = -\rho K$ (32) reprezintă deprecierea cu o rată constantăm şi $\dot{K} = rK$ (33) reprezintă creşterea cu o rată constantă *r*. Ecuația (33) este o formă echivalentă a ecuației (5), *rK* fiind vazută ca o nouă sumă generată la fiecare moment („dobânda"). *K* ar putea genera $f(K)$ la fiecare moment şi totuşi să se deprecieze cu o rată constantă ρ. În acest caz avem că $\dot{K} = f(K) - \rho K$ (34) analiza putând continua, de unde se pot deduce noi dependențe între variabilele de bază ale modelului.

Bibliografie

Frois G.A., *Dynamique économique*, Dalloz, Paris 2002

Lumby S., *Investment apraisal and financial decisions*, Chapman and Stall, London, 1994

Nguéna O.J., *Microéconomie de l'incertaine*, Dunod, Paris, 2001

Stancu, S., Huidumac C., *Teoria Portofoliilor-cu aplicații pe piața financiară*, Editura Didactică şi Pedagogică R.A., Bucureşti,1999

Stancu S., Chiriță N., *Decizii economice în condiții de incertitudine-cu aplicații pe piața financiară*, Editura Economică, Bucureşti, 2005