On the Balancing Problem with Stochastic Times

Lect.dr. Cristina COCULESCU
Universitatea Româno-Americană Bucureşti

In this item, it is presented the problem of a technical line balancing for a single model with random working times and a given operating rhythm of line.
In the theoretical studies, there is often the supposition of fixed working times of the phases of technical process. This supposition is only a hypothesis for simplicity, because in fact, working time for each phase is a random variable. This is evidently, especially for phases that are executed by human workers.
Study of undetermined aspect of operating of technical line is important in practice and need reexamination of the given restrictions and purposed objectives.
Keywords*: technological phase, workstation, random working times, technical line balancing*

Formularea problemei

Fie $F = \{1,2,...,n\}$ mulţimea fazelor proce-sului tehnologic şi $G = (F,U)$ digraful aciclic al restricţiilor de precedenţă. În continuare se va presupune că timpii de execuţie ai fazelor t_i, $i = 1,2,...,n$, sunt variabile aleatoare independente, luând valori reale nenegative. Fie f_i funcţia de repartiţie asociată lui t_i, $i \in F$. Ritmul R de funcţionare a liniei are acum semnificaţia unui ritm dorit şi nu impus.

Fie $\alpha \in [0,1]$ şi fie $P(E)$ probabilitatea de producere a evenimentului E.

O partiţie $Q = \{Q_1,...,Q_m\}$ a lui F este *o soluţie* a problemei de echilibrare cu timpi stochastici dacă satisface condiţiile:

$(x,y)\in U$, $x\in Q_r$ şi $y\in Q_s$ implică $r\le s$, pentru orice $(x,y)\in U$ (1)

$$P(T(Q_j) \le R) \ge \alpha,\ 1 \le j \le m, \qquad (2)$$

unde $T(Q_j) = \sum_{k\in Q_j} t_k$ este variabila aleatoare reprezentând timpul de execuţie în staţia Q_j, $1 \le j \le m$.

Fie δ_S mulţimea acestor soluţii.

Timpul de neutilizare în staţia Q_j este variabila aleatoare $R - T(Q_j)$, $j = 1,...,m$. Timpul total de neutilizare asociat soluţiei Q este variabila aleatoare:

$$TN(Q) = \sum_{j=1}^{m} \left(R - T(Q_j)\right) = mR - \sum_{i=1}^{n} t_i \qquad (3)$$

Minimizarea timpului total de neutilizare fiind lipsită de sens, un mod raţional de a formula obiectivul echilibrării în acest caz constă în a minimiza timpul de neutilizare mediu. Notând cu $\overline{X}$ media variabilei aleatoare X, rezultă că pentru orice $Q = \{Q_1,...,Q_m\} \in \delta_S$ timpul total de neutilizare mediu este:

$$\overline{TN}(Q) = mR - \sum_{i=1}^{n} \bar{t}_1 \qquad (4)$$

Minimizarea lui $\overline{TN}$ revine la determinarea unei soluţii $Q^* \in \delta_S$ astfel încât:

$$\left|Q^*\right| = \min\{|Q| \mid Q \in \delta_S\}, \qquad (5)$$

adică a unei soluţii cu un număr minim de staţii de lucru.

Este evident că dacă G este aciclic şi $f_i(R) \ge \alpha$, pentru $i = 1,2,...,n$, atunci $Q = \{Q_1,...,Q_n\}$ cu $Q_j = \{x_j\}$, $1 \le j \le n$, unde $(x_1,...,x_n)$ este o permutare admisibilă a lui F relativ la digraful G, este o soluţie a problemei de echilibrare cu timpi stochastici. În continuare se va lucra în aceste ipoteze care garantează că $\delta_S \ne \varnothing$.

O euristică eficientă

Notăm cu $\pi(x)$ mulţimea predecesorilor direcţi ai fazei x în digraful $G = (F,U)$. De asemenea, se va nota cu φ_A funcţia de reparti-

ție a variabilei aleatoare $X = \sum_{x \in A} t_x$, unde $A \subset F$ şi $A \neq \varnothing$.
Metoda prezentată în continuare pentru determinarea unei soluții a problemei de echilibrare cu timpi stochastici este asemănătoare cu cea din cazul determinist în care condiția de încadrare în ritm a timpilor de execuție din fiecare stație de lucru este înlocuită cu limitarea inferioară a probabilității de încadrare în ritm dată de (2).

Algoritm 1.
Pas 1. Se determină mulțimea de faze fără predecesori direcți: $F_{fp} := \{x / x \in F, \pi(x) = \varnothing\}$, se face $m := 1$ (inițializarea numărului de stații de lucru) şi $k := 1$ (inițializarea numărului de faze asignate din cele n faze din F), se determină $x_1 \in F_{fp}$ astfel încât $f_{x_1}(R) = \max\{f_x(R) / x \in F_{fp}\}$, se ia $Q_1 = \{x_1\}$ (inițializarea primei stații de lucru), se inițializează mulțimea fazelor asignate $C = \{x_1\}$ şi se trece la pasul următor.
Pas 2. Dacă $k = n$, atunci **stop**. În caz contrar $k := k + 1$, se determină mulțimea fazelor având predecesorii asignați, $F_{pa} := \{x / x \in F \setminus C, \pi(x) \subseteq C\}$, pentru fiecare $x \in F_{pa}$ se calculează $p(x) = \varphi_{Q_m \cup \{x\}}(R)$, se determină mulțimea fazelor ce pot completa ultima stație de lucru (cu respectarea condiției (2)). $D := \{x / x \in F_{pa}, p(x) \geq \alpha\}$ şi se trece la pasul următor.
Pas 3. Dacă $D \neq \varnothing$ atunci se determină $x_k \in D$ astfel încât $p(x_k) = \max\{p(x) / x \in D\}$, se completează ultima stație, $Q_m := Q_m \cup \{x_k\}$, se actualizează $C := C \cup \{x_k\}$ şi se trece la pasul 2; în caz contrar, adică $D = \varnothing$, se determină $x_k \in F_{pa}$ astfel încât

$$f_{x_k}(R) = \max\{f_x(R) / x \in F_{pa}\},$$

se face $m := m + 1$, se inițializează $Q_m := \{x_k\}$, $C := C \cup \{x_k\}$ şi se trece la pasul 2.
În legătură cu algoritmul 1 se poate formula următoarea teoremă:
Teorema 1. Dacă $G = (F, U)$ este aciclic şi $f_i(R) \geq \alpha$ pentru orice $i \in F$ şi dacă $Q = \{Q_1, ..., Q_m\}$ este obținută conform algoritmului 1, atunci $Q \in \delta_S$.

O margine inferioară
În continuare este analizat un caz particular în care soluția optimă a problemei de echilibrare cu timpi de execuție stochastici poate fi determinată în timp polinomial. Acest caz corespunde situației când digraful $G = (F, U)$ conține un drum hamiltonian, adică $U = \{(x_i, x_{i+1}) / i = 1, ..., n-1\}$, $(x_1, ..., x_n)$ este singura permutare admisibilă a mulțimii F.
În acest caz, utilizarea algoritmului următor permite obținerea unei *soluții optime* a problemei de echilibrare cu timpi stochastici.

Algoritm 2.
Pas 1. Se fac $u := 1$, $i := 1$, $Q_1 := \varnothing$ şi se trece la pasul 2.
Pas 2. Dacă $i = n$ atunci **stop**, în caz contrar $i := i + 1$ şi se trece la pasul 3.
Pas 3. Dacă $\varphi_{Q_m \cup \{x_i\}}(R) \geq \alpha$ atunci $Q_m := Q_m \cup \{x_i\}$ şi se trece la pasul 2 , în caz contrar $m := m + 1$, $Q_m := \{x_i\}$ şi se trece la pasul 2.
Teorema 2. Dacă $f_i(R) \geq \alpha$, $1 \leq i \leq n$ şi $Q = \{Q_1, ..., Q_m\}$ este obținută conform algoritmului 2, atunci Q este o soluție optimă.
Este de remarcat faptul că dacă G nu se reduce la un drum hamiltonian dar conține un astfel de drum, atunci se poate demonstra că $|F_U| = 1$ şi o soluție optimă poate fi obținută aplicând algoritmul 2 asupra unicei permutări admisibile a lui F (am notat cu F_U mulțimea permutărilor admisibile asociate digrafului $G=(F,U)$) .
O *consecință* importantă a teoremei 2 este posibilitatea obținerii unei margini inferioare a numărului de stații de lucru. Această margine inferioară oferă posibilitatea adaptării, prin modificări adecvate, a unor metode euristice utilizate pentru soluționarea problemei de echilibrare în cazul determinist la cazul stochastic.

Este de remarcat faptul că deşi modelul stochastic este mai aproape de realitate decât cel determinist, rezultatele obținute pentru primul sunt mult mai puține decât cele referitoare la al doilea. Aceasta se explică pe de o parte prin complexitatea mai mare a problemei de echilibrare cu timpi stochastici față de cea cu timpi determinişti şi ca o consecință, prin performanțele mai mici ale metodelor de rezolvare.

Pe de altă parte, adoptarea modelului stochastic implică complicații suplimentare ale activității de normare deoarece pentru fiecare fază trebuie stabilit tipul de distribuție în care se încadrează timpul ei de execuție şi parametrii care caracterizează distribuția respectivă.

Pentru linii tehnologice în care predomină activitățile executate de operatori umani, timpii de execuție ai fazelor sunt variabile aleatoare cu funcțiile de repartiție cunoscute. Atunci când dispersiile acestor variabile aleatoare sunt mici, din dorința de simplificare a modelelor matematice, timpii de execuție ai fazelor se tratează ca fiind determinişti şi având valori mediile variabilelor aleatoare asociate. În acest caz, echilibrarea vizează minimizarea numărului de stații de lucru în condițiile respectării restricțiilor de precedență şi limitării inferioare a probabilității ca timpul de execuție din fiecare stație să fie mai mic decât ritmul indicat.

Bibliografie

[1]. COCULESCU, C., *Simularea unei linii tehnologice supuse procesului de echilibrare,* în Revista de Informatică Economică, nr. 1(29)/2004, Editura Economică, Bucureşti, 2004.

[2]. COCULESCU, C., *Problema de echilibrare cu restricții de compatibilitate*-lucrare premiată la Sesiunea cercetării ştiințifice studențeşti, consacrată Anului 90 al existenței Academiei de Studii Economice Bucureşti, 26-27 aprilie,2002.

[3]. HEING, M. I., *Extension of the Dynamic Programming Method in the Deterministic and Stochastic Assembly Line Balancing Problem,* Computers an Operation Revues, 13, 1986.

[4]. KAO, E. P. C.,*A preference order dynamic program for stochastic assembly line balancing,* Management Science, 22, 10 1976.

[5]. ROBERT, L. CARRAWAY, *A Dynamic Programming Approach to Stochastic Assembly Line Balancing,* Management Science, 4, 1989.

[6]. RUSU, C., BRUDARU, O., *Proiectarea liniilor de fabricație flexibile*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1990.

[7]. SNEIDOVICH, M., *Analysis of a preference order assembly line problem,* Management Science, 27, 9, 1981.

[8]. YANMING, P., *The Algorithms for the Assembly Line Balancing Problem*, CRIF Internal Report, 1991.