Percentage programming: properties of solutions

Silviu BÂRZĂ

This paper continues to present percentage programming as was introduced earlier. Here we study some properties for solutions in strict ordered coefficients for optimization function.
***Keywords**: linear programming, combinatorial optimization, percentage programming.*

Introducere

Într-o lucrare anterioară de dată foarte recentă am încercat să considerăm transformarea problemelor procentuale date ca probleme de programare liniară continuă în probleme de programare combinatorială. Amintim că am plecat de la problemele procentuale care au forma generală:

$$\begin{cases} opt\ cx \\ A^1 x \le b^1 \\ A^2 x \ge b^2 \\ \mathbf{1} \cdot x = 1 \\ x_i \ge 0 \end{cases} \quad (1)$$

unde, c este vectorul de dimensiune n al coeficienților funcției obiectiv, funcție care cuantifică proprietatea avută în vedere în procesul de optimizare; $A^1 x \le b^1$ și $A^2 x \ge b^2$ reprezintă sistemul de inecuații prin care sunt exprimate alte proprietăți dorite pentru amestec în anumite limite, A^1 fiind o matrice cu m^1 linii și n coloane, A^2 o matrice cu m^2 linii și n coloane, b^1 un vector de dimensiune m^1 și b^2 un vector de dimensiune m^2;

1 este un vector de dimensiune n cu toate componentele egale cu 1 cu ajutorul căruia se exprimă condiția de sumă unitară. În plus, se consideră că toate valorile care intervin în exprimarea modelului sunt nenegative, cele din funcția obiectiv și din membrii drepți ai inecuațiilor condiții fiind chiar pozitiv definite. În forma extinsă acest model poate fi rescris sub forma:

$$\begin{cases} opt \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \\ \sum_{i=1}^{n} a_{ij}^1 x_i \le b_j^1 \quad pentru \quad j = 1,\dots,m^1 \\ \sum_{i=1}^{n} a_{ij}^2 x_i \ge b_j^2 \quad pentru \quad j = 1,\dots,m^2 \\ \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \\ x_i \ge 0 \quad orice \quad i = 1,\dots,n \end{cases} \quad (2)$$

unde, așa cum am văzut mai sus pentru coeficienții funcției obiectiv și pentru valorile matricelor A^1 și A^2, și pentru vectorii b^1 și b^2 sunt îndeplinite următoarele condiții:

- $c_i > 0$ pentru orice $i = 1,\dots,n$;
- $a_{ij}^1 \ge 0$ pentru orice $i = 1,\dots,n$ și pentru orice $j = 1,\dots,m^1$;
- $a_{ij}^2 \ge 0$ pentru orice $i = 1,\dots,n$ și pentru orice $j = 1,\dots,m^2$;
- $b_j^1 > 0$ pentru orice $j = 1,\dots,m^1$ și
- $b_j^2 > 0$ pentru orice $j = 1,\dots,m^2$.

Pentru evitarea unor neajunsuri care pot apare în rezolvarea acestor probleme și care sunt datorate aproximărilor făcute, și lucrului cu valori în general mici, am propus o discretizare a modelelor (1) (sau (2)) ajungând la modelul combinatorial de forma:

$$\begin{cases} opt \sum_{i=1}^{n} c_i y_i \\ \sum_{i=1}^{n} a_{ij}^1 y_i \le \alpha b_j^1 \quad pentru \quad j = 1,\dots,.m^1 \\ \sum_{i=1}^{n} a_{ij}^2 y_i \ge \alpha b_j^2 \quad pentru \quad j = 1,\dots,m^2 \\ \sum_{i=1}^{n} y_i = \alpha \\ y_i \in [0,\alpha] \quad pentru \quad i = 1,\dots,n \end{cases} \quad (3)$$

unde $\alpha = 10^k$, este dependent de precizia stabilită pentru obținerea rezultatelor (prin aproximarea la k zecimale exacte). Acest model poate fi scris condensat sub forma:

$$\begin{cases} opt\ cy \\ A^1 y \le \alpha b^1 \\ A^2 y \ge \alpha b^2 \\ \mathbf{1} \cdot y = \alpha \\ y \in \{0,1,\dots,\alpha\}^n \end{cases} \quad (4)$$

Monotonia funcţiei obiectiv având coeficienţii strict crescători

Considerăm în continuare un caz particular al modelelor de forma (4) şi anume cele în care coeficienţii funcţiei obiectiv sunt strict descrescători.

Vectorii din domeniul de lucru, $[0,\alpha]^n$, îi putem ordona conform unei relaţii de ordine introdusă natural pentru şirurile de valori şi anume, ordinea lexicografică. Astfel, vom spune că vectorii u şi v, $(u_1,...,u_n)$, $(v_1,...,v_n)$ sunt astfel încât "u mai mic (lexicografic) decât v", scris $u \prec v$, dacă există $i \in \{1,...,n-1\}$ astfel încât $u_i < v_i$ şi orice $j \in \{1,...,i-1\}$, $u_j = v_j$.

Cu aceste elemente putem da următoarea caracterizare a funcţiei obiectiv:

Propoziţie 1. *Dacă x şi y sunt soluţii admisibile pentru problema 4, $x \prec y$, diferenţa pe componenta care stabileşte relaţia de ordine este unitară şi x şi y diferă doar pe componentele i şi k, $1 \le i < k \le n$, atunci $f(x) < f(y)$.*

Demonstraţie. Faptul că x şi y diferă doar pe componentele i şi k spune că $\forall j \in \{1,...,n\} \setminus \{i,k\}$ are loc $x_j = y_j$. Cum $i < k$, afirmaţia anterioară, împreună cu faptul că $x \prec y$ ne spune că $x_i < y_i$. Deoarece diferenţa pe componenta care stabileşte relaţia de ordine este unitară obţinem că de fapt, în poziţia i avem $y_i = x_i + 1$. Acum, folosind şi faptul că x şi y sunt soluţii admisibile pentru problema (4) rezultă în plus că $y_k = x_k - 1$.

Astfel, am obţinut că dacă $x = (x_1,...,x_n)$, atunci

$$y = (x_1,...,x_{i-1}, x_i + 1, x_{i+1},...,x_{k-1}, x_k - 1, x_{k+1},...,x_n)$$

.

Calculăm diferenţa între valorile funcţiei obiectiv în x şi y. Obţinem

$$\begin{aligned} f(x) - f(y) &= \sum_{t=1}^{n} c_t x_t - \sum_{t=1}^{n} c_t y_t = \\ &= \sum_{\substack{t=1 \\ t\notin\{i,k\}}}^{n} c_t x_t + c_i x_i + c_k x_k - \sum_{\substack{t=1 \\ t\notin\{i,k\}}}^{n} c_t y_t - c_i y_i - c_k y_k = \\ &= c_i x_i + c_k x_k - c_i(x_i + 1) - c_k(x_k - 1) = \\ &= -c_i + c_k < 0 \end{aligned}$$

Inegalitatea are loc deoarece coeficienţii funcţiei obiectiv sunt strict descrescători şi astfel putem rezuma că $f(x) < f(y)$.

Generalizarea propoziţiei 1 conduce la următorul rezultat:

Propoziţia 2. *Dacă x şi y sunt soluţii admisibile pentru problema (4) care are coeficienţii funcţiei obiectiv strict descrescători şi $x \prec y$, atunci $f(x) < f(y)$.*

Observaţie. Această propoziţie statuează că în condiţiile date funcţia obiectiv este monotonă.

Demonstraţie. Plecând de la x construim un şir crescător $x = x^1 \prec x^2 \prec ... \prec x^p = y$ în care între două elemente consecutive modificările sunt conforme enunţului din propoziţia 1. Atunci, prin aplicarea repetată a acestei propoziţii obţinem

$$f(x) = f(x^1) < f(x^2) < ... < f(x^p) = f(y).$$

Pentru construcţia şirului procedăm astfel. Considerăm că $x^1 = x$. Dacă am construit x^t, cum $x^t \prec y$ rezultă că există i astfel încât $x_i^t < y_i$ anterior existând doar egalităţi. Fie $j > i$ astfel încât $x_j^t > y_j$ şi j cel mai mic cu această proprietate. Considerăm

$$x_k^{t+1} = \begin{cases} x_k^t & pentru \quad k \notin \{i,j\} \\ x_i^t + 1 & pentru \quad k = i \\ x_j^t - 1 & pentru \quad k = j \end{cases}.$$

O consecinţă firească propoziţiei 2 este o posibilă mărginire a valorilor funcţiei obiectiv pentru problemele de programare procentuală.

Propoziţia 3: *Fie A mulţimea soluţiilor admisibile pentru o problemă de programare procentuală, $A \neq \emptyset$, pentru care coeficienţii funcţiei obiectiv formează un şir strict mono-*

ton şi x^m, x^M definite ca minim şi maxim a vectorilor din A relativ la ordinea lexicografică dată mai sus. Atunci pentru orice $x \in A$, are lor relaţia $f(x^m) \leq f(x) \leq f(x^M)$.

Concluzii şi abordări ulterioare

Acest material doreşte să ofere o caracterizare de tip monotonie pentru soluţiile admisibile ale problemelor procentuale. Se poate astfel considera că în operaţiile de regăsire a soluţiilor optime ne putem preleva de monotonie pentru a reduce volumul de căutare (deci de lucru).

Ca abordare ulterioară, ar fi interesant studiul comportamentului monotoniei în regăsirea soluţiei optime la ignorarea iniţială a condiţiei derivate din condiţia de sumă unitară.

Un alt subiect interesant pentru căutarea unui algoritm cu număr cât mai mic de paşi este reprezentat de o eventuală relaţie între vectorii admisibili extremi relativ la ordinea dată de relaţia de ordine lexicografică şi cei care au în plus proprietatea de monotonie strictă între componente.

Cele două subiecte specificate mai sus sunt în studiu şi vor face subiectul unor comunicări viitoare.

Bibliografie

[1] L. Şerbulescu, M. Ciocoiu, S. Bârză - Optimizarea Reţetelor de amestec fibros destinate obţinerii fibrelor cardate prin utilizarea algoritmului simplex, Revista Română de Textile-Pielărie nr.4/2000, pp.11-16;

[2] S. Bârză, L.Şerbulescu - Rezolvarea problemelor de programare liniară prin algoritmul simplex clasic, Revista Română de Textile-Pielărie nr. 1/2001, pp. 11-16;

[3] S. Bârză, Transformarea combinatorială a problemelor de programare liniară cu aplicaţii în economie, Comunicare la simpozionul ştiinţific economic al Universităţii Spiru Haret, Bucureşti, mai 2001;

[4] S. Bârză, Principalele instrumente utilizate în formularea problemelor de programare matematică bazată pe combinatorică (retrospectivă). Comunicare la simpozionul ICEC-2002, octombrie 2002, în curs de apariţie;

[5] S. Bârză, Programare procentuală: formulări şi proprietăţi, Revista de Informatică, nr. 1, 2004, Inforec, Bucureşti (în curs de apariţie).

[6] Goemans M.X., *Semidefinite Programming and Combinatorial Optimization*, Doc. Math. Extra Volume ICM, 1998, 657-666

[7] Goemans M.X., Rendl F., *Semidefinite Programming in Combinatorial Optimization*, November 1999

[8] Hoffman K.L., *Combinatorial Optimization: Current Successes and Directions for the Future*, Journal of Computational and Applied Mathematics 124 pp.341, 2000

[9] Nemhauser G.L., Wolsey L.A., *Integer and combinatorial optimization*, John Wiley & Sons Inc, New York, 1999.

[10] Parker R.G., Rardin R.L., *Discrete Optimization*, Academic Press, Boston, 1998