Prima de risc si coeficientul de aversiune la risc în acceptiunea lui Pratt

Prof.dr. Stelian STANCU
Catedra de Cibernetica Economica, A.S.E. Bucuresti

The article presents the essential aspects on the terms of certain equivalent, selling price and risk premium. The second part of the paper presents aspects concerning the risk premium and the aversion risk coefficient from Pratt's point of view.
Keywords: *certain equivalent, selling price and risk premium, Pratt's approximation.*

Notiunile de echivalent cert, pret de vânzare si prima de risc

Definitia 1: Numim *echivalent cert* valoarea w^* care conduce la o utilitate egala cu utilitatea asteptata din dotarea initiala w_0 si din loteria, y, adica: $U(w^*) = EU(w_0 + y)$.

Definitia 2: *Pretul de vânzare* a unei loterii y, reprezinta diferenta dintre echivalentul cert si dotarea initiala, adica: $pv(w_0, y) = w^* - w_0$.

Observatii:

1) Din faptul ca $w^* \sim w_0 + y$ se deduce ca agentul economic este indiferent la risc;

2) În cazul în care agentul este neutru la risc, pretul de vânzare a unei loterii este egal cu speranta matematica a valorii finale, respectiv cu bogatia medie a agentului economic, adica: $w^* = E(w) = w_0 + E(y)$.

Definitia 3: *Prima de risc* asociata unei loterii *y*, $P(w_0, y)$, reprezinta diferenta dintre valoarea asteptata a loteriei (pentru un individ oarecare) si cea a unui individ neutru la risc, adica: $P(w_0, y) = E(y) - pv(w_0, y)$

Observatie: Pentru un individ neutru la risc $P(w_0, y) = 0$.

Prima de risc permite scrierea relatiei fundamentale în caz de monorisc: $U(w_0 + E(y) - P(w_0, y)) = EU(w_0 + y)$

Observatie: Relatia $w^* > w_0 + \mathrm{E}(y)$ arata ca valorile functiei de utilitate cresc odata cu bogatia.

Echivalentul cert poate fi astfel exprimat prin intermediul primei de risc, astfel: din $P(w_0, y) = E(y) - pv(w_0, y)$ si $pv(w_0, y) = w^* - w_0$ se deduce ca $w^* = w_0 + \mathrm{E}(y) - P(w_0, y)$ adica echivalentul cert este diferenta dintre riscul mediu si prima de risc. Totodata, din $w^* > w_0 + \mathrm{E}(y)$ rezulta $w_0 + \mathrm{E}(y) - P(w_0, y) > w_0 + \mathrm{E}(y)$ si deci $P(w_0, y) < 0$.

Concluzie: Prima de risc corespunzatoare unei loterii pentru un agent economic cu placerea riscului este negativa. Similar, se poate demonstra ca prima de risc în cazul aversiunii la risc este pozitiva.

Exemplul 1: Considerând un agent economic pentru care se cunosc:

- preferintele reprezentate prin functia de utilitate $U(w) = \sqrt{w}$;
- dotarea initiala la nivelul agentului respectiv $w_0 = 7000$;
- o loterie echiprobabila neutra $y = L\left(800, -800; \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

se cere determinarea echivalentului cert, pretului de vânzare si primei de risc.

Rezolvare:

Calculul echivalentului cert: din $U(w^*) = EU(w_0 + y)$ avem $\sqrt{w^*} = \frac{1}{2}\sqrt{7800} + \frac{1}{2}\sqrt{6200}$ de unde $w^* = 6977{,}07$

Calculul pretului de vânzare:

$pv(w_0, y) = w^* - w_0 = 6977{,}07 - 7000 = -22{,}93$

Calculul primei de risc:

$P(w_0, y) = \mathrm{E}(y) - pv(w_0, y)$

de unde $P(w_0, y) = \frac{1}{2}\cdot 800 + \frac{1}{2}\cdot(-800) - (-22{,}93) = 22{,}93$

Deoarece prima de risc este pozitiva, se deduce ca agentul economic are aversiune la risc.

Exemplul 2: Reluând E1, pentru $U(w) = w^2$, obtinem:

- din $U(w^*) = EU(w_0 + y)$ se deduce ca $(w^*)^2 = \frac{1}{2}(7800)^2 + \frac{1}{2}(6200)^2$ de unde $w^* = 7045{,}57$.
- pretul de vânzare: $pv(w_0, y) = w^* - w_0 = 7045{,}57 - 7000 = 45{,}57$.
- prima de risc: $P(w_0, y) = \mathrm{E}(y) - pv(w_0, y) = \frac{1}{2}\cdot 800 + \frac{1}{2}(-800) - 45{,}57 = -45{,}57$.

Deoarece prima de risc este negativa, se deduce ca agentul economic are placerea riscului.

Observatie: Pentru o functie de utilitate liniara se va gasi ca agentul este neutru la risc.

Prima de risc si coeficientul de aversiune la risc în acceptiunea lui Pratt

Presupunând datele: o loterie y pentru care se cunoaste f(y)- densitatea de probabilitate si dotarea initiala, w_0, cu $w_0 >> y$, la nivelul unui agent economic, atunci prima de risc se calculeaza dupa relatia: $U(w_0 + E(y) - P(w_0, y)) = EU(w_0 + y)$ (*ecuatia fundamentala în caz de monorisc*). Dezvoltând în serie astfel: membrul stâng pâna la ordinul 1, iar membrul drept pâna la ordinul 2, vom obtine:

$$U(w_0 + E(w_0, y) - P(w_0, y)) = U(w_0 + E(y)) - P(w_0, y)\cdot U'(w_0 + E(y)) + $$
$$+ R_1(P(w_0, y) \approx U(w_0 + E(y)) + P(w_0, y)\cdot U'(w_0 + E(y))$$

$$EU(w_0 + y) = \int U(w_0 + E(y) + \tilde{y} - E(y))\, f(\tilde{y})d\tilde{y} \approx$$
$$\approx \int\left[U(w_0 + E(y)) + (\tilde{y} - E(y))U'(w_0 + E(y)) + \frac{(\tilde{y} - E(y))^2}{2}U''(w_0 + E(y))\right]\times$$
$$\times f(\tilde{y})d\tilde{y} \approx U(w_0 + E(y))\int f(y)dy + U'(w_0 + E(y))\int (y - E(y))\, f(y)dy +$$
$$+ \frac{U''(w_0 + E(y))}{2}\int(\tilde{y} - E(y))^2\, f(\tilde{y})dy \approx$$
$$\approx U(w_0 + E(y))\cdot 1 + U'(w_0 + E(y))[E(y) - E(y)] + \frac{U''(w_0 + E(y))}{2}\cdot s^2 y$$

Observatie: Aceste rezultate s-au obtinut pe baza formulelor:

$$h(u + v) = h(u) + vh'(u) + R(v)$$
$$h(u + v) = h(u) + vh'(u) + \frac{v^2}{2}h''(u) + R(v^2)$$

astfel: pentru membrul stâng h=U, $u=w_0+E(y)$ si $v=-P(w_0, y)$; pentru membrul drept h=U, $u=w_0+E(y)$ si v=y-E(y). Egalând cei doi membri ai egalitatii de start obtinem:

$$U(w_0 + E(y)) - P(w_0, y)U'(w_0 + E(y)) \approx U(w_0 + E(y)) + U'(w_0 + E(y))\cdot$$
$$\cdot[E(y) - E(y)] + \frac{U''(w_0 + E(y))}{2}\cdot s_y^2$$

de unde:

$$-P(w_0, y)\cdot U'(w_0 + E(y)) \approx \frac{U''(w_0 + E(y))}{2}\cdot s_y^2 \text{ si } P(w_0, y) = -\frac{U''(w_0 + E(y))}{U'(w_0 + E(y))}\cdot\frac{s_y^2}{2}.$$

Asa cum se poate vedea, prima de risc dupa Pratt este formata din doi termeni:

- unul subiectiv, $-\frac{U''(w_0 + E(w_0 + E(y)))}{U'(w_0 + E(y))}$, legat direct de agent si care masoara *intensita-*

tea aversiunii fata de risc (coeficientul de aversiune absoluta la risc);

- celalalt obiectiv, $\frac{s_y^2}{2}$, care masoara *cantitatea de risc intrinsec* la nivelul loteriei.

Notând primul termen cu $r(\tilde{w}) = -\frac{U''(\tilde{w})}{U'(\tilde{w})}$, reprezentând coeficientul de aversiune absoluta la risc, avem urmatoarele proprietati ale acestuia:

- $r(\tilde{w})$ este mai mic, mai mare ca zero, respectiv nul, dupa cum agentul este cu placerea riscului, cu aversiune fata de risc, respectiv neutru la risc;
- cu cât $r(\tilde{w})$ ia valori mai mari, cu atât agentul are o aversiune mai mare fata de risc; similar se analizeaza si cazul placerii riscului;
- $r(\tilde{w})$ este invariant la orice transformare monoton crescatoare a functiei de utilitate;
- cu cât $r(\tilde{w})$ este mai mare ca zero, respectiv mai mic ca zero, cu atât functia de utilitate este mai concava, respectiv mai convexa;
- toleranta fata de risc este masurata prin:

$$\bar{r}(\tilde{w}) = \frac{1}{r(\tilde{w})}$$

În concluzie, functie de sensul de variatie al coeficientului $r(\tilde{w})$, functiile de utilitate pot fi grupate în trei clase:

1) clasa functiilor de utilitate cu *aversiune absoluta la risc crescatoare*, caz în care $r(\tilde{w})$ este o functie crescatoare în $\tilde{w}$;
2) clasa functiilor de utilitate cu *aversiune absoluta la risc descrescatoare*, caz în care $r(\tilde{w})$ este o functie descrescatoare în $\tilde{w}$;
3) clasa functiilor de utilitate cu *aversiune absoluta la risc constanta*, caz în care $r(\tilde{w})$ este constanta în raport cu $\tilde{w}$.

Exemplul 3: Pentru datele din E1 vom determina coeficientul de aversiune absoluta la risc si prima de risc în aproximarea lui Pratt. Calculul lui $r(\tilde{w})$:

$$U'(w) = \frac{1}{2\sqrt{w}}, \quad U''(w) = -\frac{1}{4w\sqrt{w}}$$

de unde $r(w) = -\frac{U''(w)}{U'(w)} = \frac{1}{2w} > 0$ rezulta ca agentul are aversiune la risc.

Din $\frac{\partial r(w)}{\partial w} = -\frac{1}{2w^2} < 0$ => functia de utilitate face parte din clasa celor cu aversiune absoluta la risc descrescatoare. Aproximarea primei de risc pe baza formulei lui Pratt: $P(w_0, y) \approx r(w_0 + \mathrm{E}(y))\frac{s_y^2}{2}$. Dar

$$\mathrm{E}(y) = \frac{1}{2}\cdot 800 + \frac{1}{2}\cdot(-800) = 0$$

$$s_y^2 = \mathrm{E}(y^2) - (\mathrm{E}(y))^2 = \frac{1}{2}\cdot 800^2 + \frac{1}{2}(-800)^2 - 0^2 = 640000$$

si deci $P(w_0, y) \simeq \frac{1}{2(w_0 + \mathrm{E}(y))}\cdot\frac{s_y^2}{2} = \frac{1}{2(7000+0)}\cdot\frac{640000}{2} = 22,857$

Se constata ca aceasta aproximare este foarte buna, fiind foarte apropiata de valoarea obtinuta la E1 (22,93).

Exemplul 4: Pentru datele din E1 vom determina de asemenea $r(\tilde{w})$ si $P(w_0, y)$. Coeficientul de aversiune absoluta la risc: $U'(w) = 2w$, $U''(w) = 2$, de unde $r(w) = -\frac{U''(w)}{U'(w)} = -\frac{2}{2w} = -\frac{1}{w} < 0$, rezulta ca agentul are placerea riscului.

Din $\frac{\partial r(w)}{\partial w} = \frac{1}{w^2} > 0$ => functia de utilitate face parte din clasa celor cu aversiune absoluta la risc crescatoare. Aproximarea primei de risc pe baza formulei lui Pratt: $P(w_0, y) \approx r(w_0 + \mathrm{E}(y))\frac{s_y^2}{2}$.

Dar $\mathrm{E}(y) = 0$ si $s_y^2 = 640000$ (din E5) de unde:

$$P(w_0, y) \approx -\frac{1}{w_0 + \mathrm{E}(y)}\cdot\frac{s_y^2}{2} = -\frac{1}{7000+0}\cdot\frac{640000}{2} = -45,71$$

ceea ce reprezinta o buna aproximare a valorii calculate la E2 (-45,57).

Exemplul 5: Considerând un agent economic pentru care se cunosc:
- preferintele reprezentate prin functia de utilitate $U(w) = w^2$;
- dotarea initiala la nivelul agentului respectiv $w_0 = 7000$;
- o loterie $y = L\left(800, -1200; \frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$

se cere determinarea primei de risc în aproximarea lui Pratt.

Rezolvare

Avem $P(w_0, y) \simeq r(w_0 + \mathrm{E}(y))\frac{s_y^2}{2}$. Dar $\mathrm{E}(y) = \frac{1}{4}\cdot 800 + \frac{3}{4}\cdot(-1200) = -700$ si

$$s_y^2 = (\mathrm{E}(y^2) - \mathrm{E}(y))^2 = \frac{1}{4}\cdot 800^2 + \frac{3}{4}(-1200)^2 - (-700)^2 = 750000$$

Ca urmare $P(w_0, y) \approx -\frac{1}{w_0 + \mathrm{E}(y)}\cdot\frac{s_y^2}{2} \approx -\frac{1}{7000 - 700}\cdot\frac{750000}{2} \approx -59{,}52$

Determinarea valorii exacte a primei de risc: $P(w_0, y) = \mathrm{E}(y) - pv(w_0, y)$. Dar $pv(w_0, y) = w^* - w_0$.

Calculul echivalentului cert:

Din $U(w^*) = EU(w_0 + y)$ avem $(w^*)^2 = \frac{1}{4}\cdot 7800^2 + \frac{3}{4}\cdot 5800^2$ de unde $w^* = 6359{,}25$.

Ca urmare $pv(w_0, y) = 6359{,}25 - 7000 = -640{,}75$, de unde $P(w_0, y) = -700 - (-640{,}75) = -59{,}25$.

Se constata astfel ca prima de risc în aproximarea lui Pratt este o buna aproximare a primei de risc în valoare exacta.

Bibliografie

ANDREI T., STANCU, S., PELE D., Statistica-teorie si aplicatii, Editura Economica, Bucuresti 2002;

LAFFONT, J.J., TIROLE, J., A Theory of Incentives in Procurement and Regulation, M.I.T. Press, 1993;

LAFFONT, J. J., ROCHET, J., Information and Incentives in Organization, Ed. Economica, 1998;

MARIN, D., STANCU, S., Microeconomie, Editura ASE, Bucuresti, 2000;

STANCU, S., ANDREI, T., Microeconomie-teorie si aplicatii, Editura ALL, Bucuresti 1997;

STANCU, S., HUIDUMAC, C., Teoria Portofoliilor-cu aplicatii pe piata financiara, Editura Didactica si Pedagogica R.A., Bucuresti, 1999;

STANCU, S., Modelarea cibernetica a fenomenelor economice-teorie si aplicatii, Editura ASE, Bucuresti, 2002;

STANCU, S., Microeconomie-teorie si teste grila, Editura Economica, Bucuresti, 2002;

STANCU, S., Competitia pe piata si echilibrul economic, Editura Economica, Bucuresti, 2002.