Consideratii privind metoda elementelor de frontiera

Prof.dr. Mihaela MUNTEAN
Catedra de Informatica Economica, Universitatea de Vest Timisoara
mihaela.muntean@fse.uvt.ro

The paper proposes a programmable algorithmically schema for the boundary element method and introduces some higher order boundary element.
Keywords: *boundary element, shape functions, boundary element method.*

Consideratii privind metoda elementelor de frontiera

Atât metoda diferentelor finite cât si metoda elementelor finite sunt cazuri speciale ale metodei reziduurilor ponderate. Ambele metode aproximeaza ecuatiile care guverneaza fenomenul în interiorul domeniului fizic, reducând numarul infinit de grade de libertate ale sistemului continuu la o multime finita. Ele discretizeaza atât domeniul cât si frontiera sa elaborând si relatii speciale pentru "absorbirea" în ecuatii a conditiilor la limita date.

Metoda elementelor de frontiera (MEF_R), dezvoltata în mod deosebit în ultimii 20 de ani, este o noua metoda aproximativa de solutionare a problemelor la limita. În esenta, aceasta metoda, utilizând o solutie a ecuatiei omogene asociate sau o solutie fundamentala a ecuatiei date, reduce problema la o ecuatie integrala pe frontiera domeniului. Prin integrarea numerica sau analitica a acestei ecuatii integrale pe frontiera - care pretinde o discretizare doar a frontierei - se obtin datele necesare ce vor permite, prin intermediul unei reprezentari integrale asociate ecuatiei date, calculul solutiei în orice punct al domeniului.

Ecuatia integrala pe frontiera, pe lânga faptul ca micsoreaza cu o unitate dimensiunea problemei de rezolvat, incorporeaza si conditiile la limita asociate pentru care nu vor mai fi necesare relatii speciale. Metoda se poate aplica, fara o pregatire prealabila si domeniilor infinite, conditiile de la infinit fiind înglobate în ecuatia integrala respectiva.

Este însa foarte important sa subliniem ca, pretul pe care-l platim facilitatilor enumerate mai sus consta în obligativitatea construirii explicite a unei solutii a ecuatiei omogene sau a unei solutii fundamentale. Aceasta va restrânge sfera de aplicabilitate a MEF_R, în general, la operatori diferentiali cu coeficienti constanti. Deci nu trebuie sa credem ca MEF_R este un procedeu universal, ci doar o metoda cu rezultate mai bune în anumite situatii.

Daca ar fi sa comparam metoda elementelor finite (MEF) cu MEF_R sub aspectul timpului de calculator, am constata ca ele sunt de acelasi ordin de marime. O explicatie a acestei concluzii consta în aceea ca reducerea cu o unitate a dimensiunii problemei este contracarata de caracterul simetric si "rar" al matricei sistemului în MEF, calitate care se pierde în MEF_R. În acelasi timp, daca MEF obtine simultan solutia în orice punct al retelei interioare, MEF_R construieste aceasta solutie ulterior utilizând o reprezentare integrala ce foloseste datele pe contur (determinate în totalitate prin ecuatia integrala de frontiera). Totusi MEF_R se deosebeste avantajos prin urmatoarele proprietati:

- rezultatele sunt bune chiar si pentru un numar mic de noduri pe frontiera;
- metoda este aplicabila fara modificari, atât pentru probleme interioare cât si pentru probleme exterioare (domenii nemarginite);
- reprezentarea integrala a solutiilor în interiorul domeniului permite diferentierea analitica a acestor solutii;
- adesea solutia ecuatiei integrale pe frontiera este legata de anumite marimi fizice de deosebit interes, care vor fi implicit calculate.

În privinta stabilirii ecuatiei integrale pe frontiera se pot utiliza diferite metode, cum ar fi: principiul lucrului virtual, teoremele lui Green sau metoda reziduurilor ponderate. Ultima metoda prezinta o formulare unitara superioara prin generalitatea ei si este cea mai utilizata. În continuare vom folosi, însa, formulele lui Green.

Sa mai notam ca, desi, ecuatiile integrale pe frontiera au fost folosite în solutionarea problemelor la limita înca din secolul trecut, ele s-au impus odata cu cercetarile riguros dezvoltate ale lui Fredholm (prin 1903) si mai târziu ale lui Mushelisvili, Mihlin, Kupradze (dupa 1940); totusi la ora actuala nu exista o teorie matematica unitara a MEF_R. O explicatie a acestui lucru consta în faptul ca ecuatiile integrale ce intervin în MEF_R depasesc cu mult clasa bine studiatelor ecuatii de tip Fredholm. În ultimul timp, gratie cercetarilor lui W.H. Wendlandt si colaboratorilor sai s-au obtinut unele rezultate promitatoare, MEF_R fiind studiata în cazul operatorilor pseudo-diferentiali.

În continuare vom folosi lucrarile initiatorilor moderni ai MEF_R, care fac parte din "scoala de la Southampton" reprezentata prin C.A. Brebia si colaboratorii sai [3].

În vederea rezolvarii ecuatiei integrale pe frontiera solutii analitice (exacte) pot fi utilizate doar pentru anumite domenii si date particulare la limita. De aceea se va cauta o rezolvare numerica a acestei ecuatii prin reducerea ei la un sistem algebric corespunzator. Aceasta abordare presupune parcurgerea etapelor din figura 1.

Ajunsi în faza în care dispunem de ecuatiile integrale pe contur se va discretiza conturul si se va accepta pe fiecare element finit o anumita variatie a functiei necunoscute. Elementele finite de frontiera pot fi segmente de dreapta sau niste portiuni din curbe cunoscute. În functie însa de legea de variatie a functiei necunoscute pe care o acceptam pe elementul finit si de numarul de noduri pe element deosebim elemente de contur constante, liniare, patratice, de ordin superior si izoparametrice.

Expresia ecuatiei de frontiera pentru un punct P(x,y) ce coincide cu un nod j al conturului discretizat, pentru diferitele tipuri de discretizari, este cunoscuta în literatura de specialitate [1], [2], [3], [4], [6], [8]. Scriind ecuatia de frontiera pentru toate cele n noduri ale discretizarii si aplicând functia lui Green se obtine modelul discret constând dintr-un sistem de n ecuatii algebrice liniare cu $2n$ functii nodale $\Phi_{\Sigma,j}$, $\left(\frac{\partial \Phi}{\partial n_\Sigma}\right)_j$, $j=\overline{1,n}$ asociate discretizarii conturului Σ. Conform, însa, conditiilor mixte de frontiera, în fiecare nod j, s-a prescris fie functia de potential (n_D valori în nodurile situate pe $\Sigma_D \subset \Sigma$), fie derivata sa normala ($n_N = n - n_D$ valori date pe $\Sigma_N \subset \Sigma$), astfel încât cele 2n functii nodale se reduc, în fapt, la n necunoscute. Transcris matricial, acest sistem liniar este de forma:

$$[g]\{\Phi_\Sigma\} - [h]\left\{\frac{\partial \Phi}{\partial n_\Sigma}\right\} + \{f\} = 0 \qquad (1)$$

sau, grupând cele n necunoscute nodale (n_N valori ale functiei de potential în nodurile situate pe $\Sigma_N \subset \Sigma$ si n_D valori ale derivatei sale normale în nodurile de pe $\Sigma_D \subset \Sigma$, $n_N + n_D = n$) într-o singura

matrice – coloana {u}:

$$[M]\{u\} + \{TL\} = 0 \;.\; (2)$$

Matricea [M] din (2) reprezinta matricea globala a coeficientilor si contine termenii din [g] si [h] asociati componentelor necunoscute ale matricelor - coloana $\{\Phi_\Sigma\}$ si $\left\{\frac{\partial \Phi}{\partial n_\Sigma}\right\}$. Spre deosebire de MDF (Metoda diferentelor finite) si MEF, în cazul MEF_R matricea [M] are dimensiuni reduse, dar este plina (întrucât functia necunoscuta corespunzatoare nodului j depinde de toate elementele de discretizare a frontierei Σ), nesimetrica si slab conditionata. Determinarea componentelor matricei [M] impune calculul tuturor integralelor elementare, procedura numerica utilizând, de exemplu, formula de cuadratura în patru puncte a lui Gauss.

Vectorul termenilor liberi {TL} contine atât termenii din [g] si [h] asociati componentelor cunoscute ale matricelor coloana $\{\Phi_\Sigma\}$ si $\left\{\frac{\partial \Phi}{\partial n_\Sigma}\right\}$ cât si termenii vectorului {f} al functiilor de sursa. În mod aparent, existenta în (2) a integralelor de suprafata pe $\wp$, corespunzatoare functiilor de sursa, altereaza performantele MEF_R. Lucrurile sunt însa altfel, deoarece în acest caz discretizarea lui $\wp$ este conceptual diferita de discretizarea facuta în cadrul MEF deoarece acum ea nu este necesara pentru rezolvarea problemelor de câmp ci doar pentru integrarea numerica.

Formularea problemei de câmp (stabilirea domeniului de calcul, a ecuatiei diferentiale si a conditiilor la limita)

Discretizarea frontierei Σ într-o serie de elemente, asa-numitele elemente de frontiera, pe care functia Φ si derivata sa normala sunt aproximate prin polinoame de interpolare adecvate; geometria elementelor de frontiera se obtine utilizând segmente de dreapta, arce circulare sau de parabola etc.

Utilizând metoda colocatiei, ecuatia discretizata se scrie în anumite noduri particulare (precizate pe fiecare element de frontiera), în care se considera date valorile necunoscute ale functiei Φ si ale derivatei sale normale.

Integrarea, pe fiecare element de frontiera, dupa o schema de cuadratura clasica

Impunând valorile limita date ale problemei pe acele elemente unde acestea sunt cunoscute, va rezulta un sistem liniar de ecuatii algebrice. Solutia acestuia furnizeaza o solutie aproximativa si în nodurile în care nu era cunoscuta.

Fig. 1. Metoda de analiza MEF_R

Din cele de mai sus rezulta ca algoritmul MEF_R comporta etapele din figura 2, acestea reprezentând o reformulare, în termenii ecuatiei matriceale finale (1), a metodologiei descrise în figura 1.

Introducerea datelor de intrare, cuprinzând geometria si topologia elementelor de frontiera, conditiile de contur, coordonatele punctelor selectate din Ω si Ω_e, în care se determina potentialul (si eventual vectorul câmp)

Asamblarea matricelor [g] si [h] definite si rearanjarea lor, în acord cu conditiile de frontiera, pentru formarea matricei globale a coeficientilor [M]

Rezolvarea ecuatiei matriceale liniare (1) prin metoda eliminarii gaussiene sau metoda gradientului conjugat preconditionat

Calculul valorilor functiei de potential (si, eventual, ale vectorului câmp) în puncte selectate din Ω sau Ω_e.

Fig. 2. Algoritmul MEF_R

Asupra unor elemente de frontiera de ordin superior

Din literatura de specialitate [3], [6], [8], [9] sunt cunoscute elementele de frontiera (în 2D): constante, liniare, patratice si cubice. În ideea de a creste ordinul de precizie atât în aproximarea functiei de potential cât si a conturului si pentru a rezolva probleme cu singularitati, voi prezenta expresiile analitice pentru functiile de forma aferente unui element de frontiera de ordin superior cu cinci, respectiv cu sase noduri. Distinctia este legata de faptul ca sistemul de coordonate locale are originea într-un nod aflat la mijlocul intervalului sau între noduri, caz în care calculul este mai complicat. Cunoasterea acestor functii este necesara deoarece atât coordonatele geometrice ale unui punct arbitrar de pe element cât si functia de potential si derivata ei normala se aproximeaza la nivelul elementelor de frontiera prin functiile de forma $N_i^e(x)$, definite în raport cu un reper curbiliniu local x $(0 \le x \le 1)$ (geometria si variatia functiilor de interpolare este aceeasi). De exemplu, pentru elementul cu 5 noduri avem – figura 3:

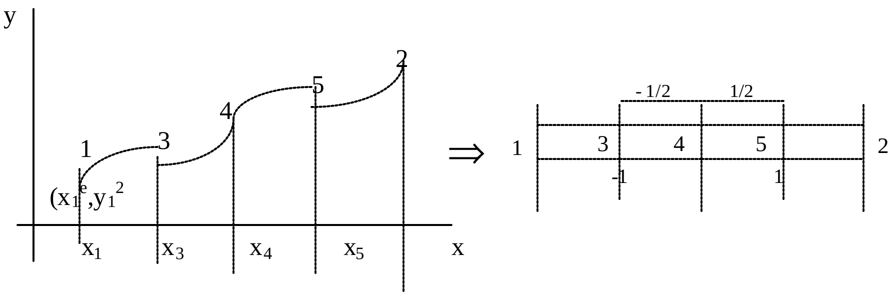

Fig. 3. Element de frontiera de ordin superior cu 5 noduri

$$x^e = N_1^{\,e}(x)\cdot x_1^{\,e} + N_2^{\,e}(x)\cdot x_2^{\,e} + N_3^{\,e}(x)\cdot x_3^{\,e} + N_4^{\,e}(x)\cdot x_4^{\,e} + N_5^{\,e}(x)\cdot x_5^{\,e} = \sum_{i=1}^{5} N_i^{\,e}(x)\cdot x_i^{\,e}$$

$$y^e = \sum_{i=1}^{5} N_i^{\,e}(x)\cdot y_i^{\,e} \qquad (3)$$

$$\Phi_\Sigma^{\,e} = \sum_{i=1}^{5} N_i^{\,e}(x)\cdot \Phi_{\Sigma,i}^{\,e} \;;\; \frac{\partial \Phi^e}{\partial n_\Sigma} = N_i^{\,e}(x)\cdot\left(\frac{\partial \Phi^e}{\partial n_\Sigma}\right)_i ,$$

unde: $N_i^{\,e}(x_j) = d_{ij} = \begin{cases} 1 \;,\; i = j \\ 0 \;,\; i \neq j \end{cases}.$

Acceptând pentru functia de forma un polinom de gradul 4:

$$N_i^{\,e}(x) = a\,x^4 + b\,x^3 + c\,x^2 + d\,x + e \qquad (4)$$

se vor obtine urmatoarele valori nodale pentru aceasta:

nod	x	$N_1^{\,e}$	$N_2^{\,e}$	$N_3^{\,e}$	$N_4^{\,e}$	$N_5^{\,e}$
1	-1	1	0	0	0	0
2	1	0	1	0	0	0
3	$-\frac{1}{2}$	0	0	1	0	0
4	0	0	0	0	1	0
5	$-\frac{1}{2}$	0	0	0	0	1

Pentru i=1, se obtine urmatorul sistem algebric liniar, a carui rezolvare va conduce la determinarea expresiei functiei de forma $N_1^{\,e}(x)$:

$$\begin{aligned} &a - b + c - d + e = 1 \\ &a + b + c + d + e = 0 \\ &\tfrac{1}{16}a - \tfrac{1}{8}b + \tfrac{1}{4}c - \tfrac{1}{2}d + e = 0 \\ &e = 0 \\ &\tfrac{1}{16}a + \tfrac{1}{8}b + \tfrac{1}{4}c + \tfrac{1}{2}d + e = 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad N_1^{\,e}(x) = \frac{1}{6}x\,(x-1)(2x-1)(2x+1) \qquad (5)$$

În mod asemanator, se obtine:

$$N_2^{\,e}(x) = \frac{1}{6}x\,(x+1)(2x-1)(2x+1) \qquad N_3^{\,e}(x) = \frac{4}{3}x\,(1-2x)(x-1)(x+1)$$

$$N_4^{\,e}(x) = \frac{1}{12}(x-1)(x+1)(2x-1)(2x+3) \quad N_5^{\,e}(x) = \frac{4}{3}x\,(1-x^2)(1-2x^2) \qquad (6)$$

În cazul elementului cu 6 noduri din figura 4 se accepta o variatie sub forma unui polinom de gradul 5:

$$N_i^e(x) = a\,x^5 + b\,x^4 + c\,x^3 + d\,x^2 + e\,x + f \qquad (7)$$

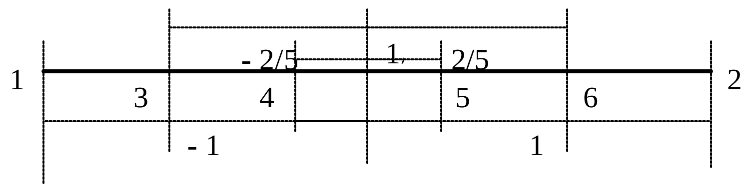

Fig. 4. Element de frontiera cu 6 noduri

Prin rezolvarea urmatoarelor 6 sisteme de ecuatii se obtin functiile de forma (7):

	I					
	1	2	3	4	5	6
$-a+b-c+d-e+f$	1	0	0	0	0	0
$a+b+c+d+e+f$	0	1	0	0	0	0
$-\frac{32}{3125}a+\frac{16}{625}b-\frac{8}{125}c+\frac{4}{25}d-\frac{2}{5}e+f$	0	0	1	0	0	0
$-\frac{1}{3125}a+\frac{1}{625}b-\frac{1}{125}c+\frac{1}{25}d-\frac{1}{5}e+f$	0	0	0	1	0	0
$\frac{1}{3125}a+\frac{1}{625}b+\frac{1}{125}c+\frac{1}{25}d+\frac{1}{5}e+f$	0	0	0	0	1	0
$\frac{32}{3125}a+\frac{16}{625}b+\frac{8}{125}c+\frac{4}{25}d+\frac{2}{5}e+f$	0	0	0	0	0	0

i	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
a	-0.6300	0.6101	12.8131	-22.1038	21.2990	-11.9885
b	0.6161	0.6161	-4.7954	4.1793	4.1793	-4.7954
c	0.1343	-0.1137	-13.3256	25.5921	-24.7551	12.4680
d	-0.1199	-0.1199	4.9872	-4.8673	-4.8673	4.9872
e	-0.0044	0.0036	0.5125	-3.4883	3.4561	-0.4795
f	0.0038	0.0038	-0.1918	0.6880	0.6880	-0.1918

Aceste rezultate noi se vor introduce în algoritmul prezentat al MEF_R.

Concluzii

Prezenta lucrare sintetizeaza câteva consideratii privind metoda MEF_R pentru care s-a propus si o schema algoritmica programabila. În aceasta sfera de preocupari am considerat necesar sa introduc, sa definesc si sa caracterizez doua elemente de frontiera de ordin superior cu cinci si sase noduri pentru care am stabilit functiile de forma izoparametrice, rezultat deosebit de util în cazul frontierelor complicate.

Bibliografie

1. Batae K.J., Wilson L.E., Numerical Methods in Finite Element Analysis, Moskva, 1982
2. Bonnet M., Equations intégrales et élements de frontiere en Mecenique des Solides, Ecole Politechnique, Palaisseau, 1993
3. Brebia C.A., Telles J.C.F., Wroblel L.C., Boundary Element Techniques. Theory and Applications in Engineering, Springer-Verlag, Berlin 1984
4. Bucur C.M., Metode numerice, Editura Facla, Timisoara, 1973
5. Fetzer J., Kurz S., Lehner G., Comparison of Analytical and Numerical Techniques for the Boundary Integrals in the BEM-FEM Coupling Considering Team Workshop Problem nr. 13,

IEEE Transactions on Magnetics,vol. 33, no. 2, 1997

6. Mîndru Gh., Radulescu M.M., Analiza numerica a câmpului electromagnetic, Editura Dacia, Cluj-Napoca, 1986
7. Nowak A.I., Brebia C.A., The Multiple-Reciprocity Method. A New Approach for Transforming BEM Domain Integrals to the Boundary, Engineering Analysis with Boundary Elements, 1989
8. Poterasu V.F., Mihalache H., Elemente de contur. Aplicatii, Editura Militara, Bucuresti, 1992

9. Petrila T., Gheorghiu C.I., Metode de element finit si aplicatii, Editura Academiei Române, Bucuresti, 1992
10. Schlemmer E., Rucker M.W., Richter R.K., Boundary Element Computations of 3D Stationary and Time-Dependent Problems Using Bezier-Spline Elements, IEEE Transactions on Magnetics, vol. 30, no.5, 1994