Dependenta structurala

Prof.dr. Emil STAN
Academia de Politie "Alexandru Ioan Cuza", Bucuresti

În lucrare se propune o definitie analitica a structurii, privita ca distributia spatiala a zonelor de penumbra. O structura va fi cu atât mai fina cu cât variatia tonurilor de gri va fi mai mare pe unitatea de spatiu. Imaginii i se asociaza o matrice care este studiata si prelucrata cu mijloacele algebrei liniare. Se reduce astfel structura definita ca o multime multi-imagine într-o imagine care contine cât mai multa informatie din toate.
Cuvinte cheie: *structura, imagine, proiectie ortogonala, vector propriu, subspatii ortogonale, urma matricei (trace).*

Introducere

Structura poate fi privita ca fiind distributia spatiala a tonurilor de gri (zonelor de penumbra). Studii privind dependenta structurala sau spatiala au fost examinate cu ajutorul lanturilor Markov, al autocorelatilor sau transformatelor Fourier. Nici un studiu n-a încercat sa gaseasca o definitie analitica a structurii. O astfel de definitie ar trebui sa aiba un model sau o clasa de modele suficient de generala pentru a include toate structurile posibile. Studiile anterioare au examinat statisticile obtinute prin diverse transformari ale datelor.

În aceasta lucrare, unde vom folosi notatiile din [1], vom întelege ca structura va fi cu atât mai fina cu cât este mai mare variatia tonurilor de gri pe unitatea de distanta. Structurile brute au o densitate mica a contrastelor mari, contrastul fiind definit prin diferenta de ton gri a punctului cu unul din vecinii sai. Fiecare punct din $Zx \times Zy$ are opt contraste în jurul sau pentru cei opt vecini mai apropiati si douazeci si patru de contraste pentru cei douazeci si patru de vecini mai departati.

Abordarea pe care o propunem este bazata pe ideea de a tine seama de efectele locale ale structurii prin examinarea contrastelor. Pentru orice imagine vom produce o imagine a contrastelor. Problema de baza este cum sa reducem contrastele (8-24) obtinute în jurul oricarui punct din $Zx \times Zy$ pastrând însa caracterizarea structurii. Pentru aceasta vom folosi reprezentarea componentelor principale.

Multiimaginea

Multimile de valori pentru imagine vor fi dreapta reala $Zx = \{1,2,..,N_x\}$ domeniul x-spatial, iar $Zy=\{1,2,..,Ny\}$ domeniul y-spatial. Imaginea I este functia $I: Zx \times Zy \to R$ si este asociata cu matricea:

$$I = \begin{pmatrix} x_{11} x_{12} \ldots\ldots x_{1Nx} \\ x_{21} x_{22} \ldots\ldots x_{2Nx} \\ . \\ . \\ x_{Ny1} x_{Ny2} \ldots x_{NyNx} \end{pmatrix}$$

Daca fiecare punct $Zx \times Zy$ este prelucrat independent de vecinii sai atunci xik este un vector cu N componente al punctului de coordonate (i,k) al multiimaginii. Dorim sa luam în seama $(2 \bullet r+1)^2$ vecini ai lui xik pentru r dat. Deci contributia la semnificatie (i,k) asupra multiimaginii din imaginea I nu va fi xik, ci xik si câteva functii reale de matricea celor $(2 \bullet r+1)^2$ vecini mai apropiati de xik:

$$\begin{pmatrix} x^j_{i-r,k-r} \ldots\ldots x^j_{i-r,k+r} \\ . \\ . \\ x^j_{ik} \\ . \\ . \\ x^j_{i+k,k-r} \ldots\ldots x^j_{i+k,k+r} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_{ik} \ldots\ldots x_{ik} \\ . \quad\quad . \\ . \quad\quad . \\ x_{ik} \ldots\ldots x_{ik} \end{pmatrix}$$

Deoarece aceasta functie trebuie sa fie aplicata la aproape fiecare punct al imaginii, trebuie sa fie una care poate fi calculata repede. Asta înseamna ca functia va fi liniara.
Folosim urmatoare metoda de pentru a determina o astfel de functie care este liniara. Fie r fixat si y1,y2,…,yk, k vectori contrast în $R^{(2\bullet r+1)^2}$ de forma anterioara, (forma matriciala o scriem ca un vector coloana) dedusa din imaginile reprezentative ale criteriului. Cautam functia f: $R^{(2\bullet r+1)^2} \to R$ unde Im(f) este subspatiul optimal uni-dimensional a lui $R^{(2\bullet r+1)^2}$, care minimizeaza

$$\sum_{k=1}^{K} (y_K - f(y_K))^2 .$$

Operatorul proiectie

Pentru a vedea ce proprietati trebuie sa aiba f pentru a realiza minimul sumei anterioare vom face câteva consideratii de algebra liniara.
Doua subspatii Va si Vb din

R^n *sunt ortogonale* $V_a \perp V_b$ *dacã si numai dacã* pentru fiecare $v_a \in V_a$ *si* $v_b \in V_b, v'_a \cdot v_b = 0$, adica va si vb sunt ortogonali. Complementul ortogonal al lui Va va fi Vb, Va $= V_b^{\perp}$, în V (ceea ce este valabil si reciproc $V_b = V_a^{\perp}$), daca în plus Va + Vb = V. Daca V = R^n atunci Va este complementul ortogonal al lui Vb.

Definitie P: $R^n \to R^n$ este operatorul proiectie daca $P^2 = P$. Se observa imediat ca Px = x pentru fiecare

$$x \in I_m P \text{ºi cã } I_m P + KerP = R^n$$

Un operator este proiectie ortogonal daca si numai daca P este simetric, P= P'.
Daca P este un operator proiectie ortogonal, atunci Im P⊥ Ker P, iar P este pozitiv semidefinit. I-P este de asemenea un operator proiectie ortogonal si Im (I-P)= Ker P.

Minimizarea erorii patrate

Teorema 1: Fie $x_1,\ldots,x_k$ vectori din R^n. Fie V un subspatiu vectorial a lui R^n si f o functie f: $R^n \to V$. Atunci

$$\min_{f:R^n\to V} \sum_{k=1}^{k} (x_k - f(x_k))' \bullet (x_k - f(x_k))$$ este pentru f un operator proiectie ortogonal R^n în V.

Demonstratie: Fie $R^n = V + V^{\perp}$, atunci $\forall x \in R^n, x = v + w$ unde $v \in V, w \in V^{\perp}$. Consideram:

$$\begin{aligned}&(x - f(x))' \bullet (x - f(x)) = x'x - x' \bullet f(x) - f(x)' \bullet x + f'(x) \bullet f(x) = \\ &= x'x - (v+w)' \bullet f(x) - f(x)' \bullet (v+w) + f'(x) \bullet f(x) = x'x - v' \bullet f(x) - \\ &- f(x)' \bullet v + f(x)' \bullet f(x) = (v+w)' \bullet (v+w) - v' \bullet f(x) - f(x)' \bullet v + \\ &+ f(x)' \bullet f(x)\end{aligned}$$

Dar

$$w \in V^{\perp}, v \in V, \text{deci: } (x - f(x))' \bullet (x - f(x)) = v'v + w'w - v' \bullet f(x) - f(x)' \bullet v + f(x)' \bullet f(x) = \\ = (v - f(x))' \bullet (v - f(x)) + w'w$$

expresia este suma a doua parti nenegative, din care o parte este independenta de f. Cum $(v - f(x))' \bullet (v - f(x))$ este partea dependenta de f, ea trebuie minimizata.
Deoarece este pozitiva, în cel mai bun caz expresia va fi zero. Deci f(x)=v. Deci f trebuie sa fie operatorul proiectie ortogonala pe subspatiul V deoarece fiecare x∈ R^n este transformat în acea parte a lui x care este în V si daca $x \in V^{\perp}$ este transformat în 0.

Deci $\min_{f:R^n\to V} \sum_{k=1}^{K} (x_k - f(x_k))' \bullet (x_k - f(x_k))$ este îndeplinit când f este operatorul proiectie ortogonala din R^n în V.

Definitie: Fie A=(aij) o matrice N×N. Atunci trace(A)= $\sum_{i=1}^{N} a_{ii}$. Se observa ca daca A este o matrice N×M si B este o matrice M×N, atunci trace (AB)=trace (BA).

Atunci fiind A o matrice $n \times n$ si x un vector $n \times 1$ în R^n vom avea: $x'Ax = \text{trace}(Axx')$

Teorema 2: Daca P este un operator proiectie ortogonal, atunci elementele de pe diagonala lui P sunt în intervalul [0, 1].

Demonstratie: Fie qij elementul (ij) din P^2. Deci $q_{ij} = \sum_{k=1}^{N} p_{ik} p_{kj}$. Dar $P^2 = P$ deci q ij=pij. Deci $p_{ij} = \sum_{k=1}^{N} p_{ik} p_{ki}$. Al i-lea element diagonal $p_{ii} = \sum_{k=1}^{N} p_{ik} p_{ki} = \sum_{k=1}^{N} p_{ik}^2$.

Deci:

$$p_{ii} = p_{ii}^2 + \sum_{k \neq i}^{N} p_{ik}^2 \geq p_{ii}^2. \text{ Deci } 0 \leq p_{ii} \leq 1.$$

Se verifica usor ca trace(P)=Rang(P). Într-adevar, Rang(P)=Dim(Im(P)). Fie t1, t2, …,tr o multime ortonormala de vectori care genereaza Im(P). Fie tr+1,…, tn orice multime ortonormala care genereaza Ker(P). Deoarece Ker(P)⊥Im(P), ti⊥tj, pentru i≠j.

Matricea T= (t1,t2,…,tn) este ortonormala.

Fie trace(P)=trace(PTT′)=trace (T′(t1, t2,…, tr O))=

$$\text{trace}\left(\begin{pmatrix} t_1' \\ t_2' \\ . \\ . \\ t_n' \end{pmatrix} (t_1, t_2, \ldots, t_r\ O)\right) = \text{trace}\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & \ddots & 0 & & \\ & & & 1 & & \\ & 0 & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} = r = \text{Dim}(\text{Im}(P))$$

Teorema 3: Fie P: $R^n \to R^n$ un operator proiectie ortogonal pe Vr, subspatiu r dimensional a lui R^n. Fie $x_1, x_2, \ldots, x_k$ vectori dati în R^n. Atunci $\sum_{k=1}^{K} (x_k - Px_k)' \bullet (x_k - P_{xk})$ îsi atinge minimul când Vr este subspatiul r dimensional generat de primii vectori proprii ai lui $\sum_{k=1}^{K} x_k x_k'$ cu valorile proprii cele mai mari. Minimul este suma celorlalte (n-r) valori proprii $\sum_{k=1}^{K} x_k x_k'$. Atunci

$$\sum_{k=1}^{K} (x_k - Px_k)' \bullet (x_k - P_{xk}) = \sum_{k=1}^{K} x_k' \bullet (I-P)_{x_k} = \text{trace}((I-P)\sum_{k=1}^{K} x_k x_k')$$

Demonstratie: Deoarece $\sum_{k=1}^{K} x_k x_k'$ este o matrice reala simetrica, exista o matrice ortogonala T, a carei coloane sunt vectori proprii normalizati ai lui $\sum_{k=1}^{K} x_k x_k'$, astfel ca $T' \sum_{k=1}^{K} x_k x_k'$ T=D, o matrice diagonala.

Deoarece $\sum_{k=1}^{K} x_k x_k'$ este pozitiv semidefinita, elementele diagonale ale lui D sunt nenegative.

Trace (I-P) $\sum_{k=1}^{K} x_k x_k'$ = trace((I-P)TDT′)= trace (T′(I-P)TD)

Observam ca T′(I-P)T este un operator proiectie ortogonal deoarece

$$T'(I-P)TT'(I-P)T = T'(I-P)(I-P)T = T'(I-2P+P^2)T = T'(I-P)T$$

$$(T'(I-P)T)' = T'(I-P)'T = T'(I-P')T = T'(I-P)T$$

$$\text{Fie } P^* = T'(I-P)T. \quad \text{Vom avea:}$$

$$\text{trace}(T'(I-P)TD) = \text{trace}(P^*D) = \sum_{i=1}^{n} p^*_{ii} d_{ii}$$

Fara pierderea generalitatii putem presupune ca dii≥djj pentru i < j. Dorim sa minimizam

$$\sum_{i=1}^{n} p_{ii}^{*} d_{ii} \text{ supus } la\ restrictia\ c\tilde{a}\ P^{*}\ proiecteaz\tilde{a}\ pe\ un\ subspatiu (n-r) \text{ dim}ensional.$$

$$Deoarece \sum_{i-1}^{n} p_{ii}^{*} = n - r^{o} i 0 \le p_{ii}^{*} \le 1, \text{ min}imul\ lui \sum_{i=1}^{n} p_{ii}^{*} d_{ii}\ este \sum_{i=r+1}^{n} d_{ii}$$

(sumele a (n-r) valori proprii minime ai lui $\sum_{k=1}^{K} x_k x_k'$). Pentru aceasta alegem

$$p_{ii} = \begin{cases} 0, & i = 1,2,..r \\ 1, & i = r+1,..,n \end{cases}$$

Deoarece P^{*} este operator proiectie ortogonal,

$$p_{ii}^{*} = p_{ii}^{*2} + \sum_{ij=1}^{n} p_{ij}^{*2}.$$ Dacã $p_{ii}^{*} = 1$ sau $p_{ii}^{*} = 0$ atunci pentru j≠i trebuie sa avem $p_{ij}^{*} = 0$

Deci
$$P^{*} = \begin{pmatrix} 0 & & & & & & \\ & \ddots & 0 & & & & \\ & & 0 & & & & \\ 0 & & & 1 & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}.$$ Considerãm $P = P^{*}$.

Deci
$$P = T(I-P)T' = T\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & \ddots & 0 & & \\ & & & 1 & & \\ 0 & & 0 & & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} T' = \begin{pmatrix} t_{11}t_{12}\dots t_{1n} \\ t_{21}t_{22}\dots t_{2n} \\ . \\ . \\ t_{n1}t_{n2}\dots t_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & 0 & & \\ & & 1 & & \\ 0 & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} T' =$$

$$= \begin{pmatrix} t_{11}t_{12}\dots t_{1r} & \\ t_{21}t_{22}\dots t_{2r} & \\ . & \\ . & O \\ . & \\ t_{n1}t_{n2}\dots t_{nr} & \end{pmatrix} T' = \begin{pmatrix} t_{11}t_{12}\dots t_{1r} & \\ t_{21}t_{22}\dots t_{2r} & \\ . & \\ . & O \\ . & \\ t_{n1}t_{n2}\dots t_{nr} & \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t_{11}t_{21}\dots t_{n1} \\ t_{12}t_{22}\dots t_{n2} \\ . \\ . \\ . \\ t_{1n}t_{2n}\dots t_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{r} t_{1i}^{2} \sum_{i=1}^{r} t_{1i}t_{2i}\dots \sum_{i=1}^{r} t_{1i}t_{ni} \\ \sum_{i=1}^{r} t_{2i}t_{1i} \sum_{i=1}^{r} t_{2i}^{2}\dots \sum_{i=1}^{r} t_{2i}t_{ni} \\ . \\ . \\ \sum_{i=1}^{r} t_{n1}t_{1i} \sum_{i=1}^{r} t_{ni}t_{2i}\dots \sum_{i=1}^{r} t_{ni}^{2} \end{pmatrix}$$

Dar fiecare coloana a lui P este o combinatie liniara a primelor r coloane ale lui T. Deci:

$$P = \left(\sum_{i=1}^{r} t_{1i} \begin{pmatrix} t_{1i} \\ t_{2i} \\ . \\ . \\ t_{ni} \end{pmatrix} \sum_{i=1}^{r} t_{2i} \begin{pmatrix} t_{1i} \\ t_{2i} \\ . \\ . \\ t_{ni} \end{pmatrix} \dots \sum_{i=1}^{r} t_{ni} \begin{pmatrix} t_{1i} \\ t_{2i} \\ . \\ . \\ t_{ni} \end{pmatrix} \right)$$

Deoarece coloanele lui T sunt vectori proprii ai lui $\sum_{k=1}^{K} x_k x_k'$ si deoarece imaginea unei transformari este generata de coloanele matricei, P este operator proiectie ortogonala pe subspatiul generat de r vectori proprii ai lui $\sum_{k=1}^{K} x_k x_k'$ cu valorile proprii cele mai mici.

<u>Teorema 4</u>: Fie $x_1, \dots, x_k$ vectori din R^n. P: $R^n \to R^n$ este un operator proiectie ortogonal pe subspatiul vn, generat de vectorii proprii ai lui $\sum_{k=1}^{K} x_k x_k'$ cu valorile proprii cele mai mari. Fie

$$\varepsilon_1^2 = \sum_{k=1}^{K} (x_k - P_{X_k})' \bullet (x_k - Px_k). \text{ Fie } z = \frac{1}{K}\sum_{k=1}^{K} x_k. \text{ Fie } P^*: R^n \to R^n \text{ un operator proiectie}$$

ortogonala pe subspatiul V_m^* generat de m vectori proprii ai lui

$$\sum_{k-1}^{K} (x_k - z) \cdot (x_k - z)' \textit{ cu cele mai mari valori.}$$

$$\textit{Fie } e_2^2 = \sum_{k=1}^{K} ((x_k - z) - P^*(x_k - z))' \cdot ((x_k - z) - P^*(x_k - z)) \textit{ si } e_1^2 \geq e_2^2$$

<u>Demonstratie</u>: Aducând la forme mai simple obtinem

$$e_1^2 = trace(I-P)\sum_{k=1}^{K} x_k x_k'; e_2^2 = trace((I-P^*)\sum_{k=1}^{K} (x_k - z) \bullet (x_k - z)'$$

$$Dar \sum_{k=1}^{K} (x_k - z) \bullet (x_k - z)' = \sum_{k=1}^{K} x_k x_k' - \sum_{k=1}^{K} x_k z' - z\sum_{k=1}^{K} x_k + Kzz' = \sum_{k=1}^{K} x_k x_k' - Kzz'.$$

$$Deci\ e_1^2 = trace((I-P) \bullet (\sum_{k=1}^{K} (x_k - z) \bullet (x_k - z)' + Kzz'))\ si$$

$$e_2^2 = trace((I-P^*)\sum_{k=1}^{K} (x_k - z) \bullet (x_k - z)')$$

$$Dar\ trace((I-P^*)\sum_{k=1}^{K} (x_k - z) \bullet (x_k - z)') \leq trace((I-P)\sum_{k=1}^{K} (x_k - z) \bullet (x_k - z)')\ (vezi\ teorema\ 3)$$

$$\text{Prin } urmare\ e_2^2 \leq e_1^2 - trace((I-P)Kzz')\ sau\ e_2^2 \leq e_1^2 - kz' \cdot (I-P) \cdot z$$

Deoarece I-P este pozitiv semidefinita, $z' \cdot (I-P) \cdot z \geq 0$. Deci:

$$\varepsilon_2^2 \leq \varepsilon_1^2 - Kz' \cdot (I-P) \cdot z \leq \varepsilon_1^2.$$

Aceasta teorema a aratat ca daca consideram translatia datelor prin media lor, eroarea patrata pentru o proiectie r dimensionala este mai mica decât fara translatie. Vom arata ca nici o alta translatie nu este mai buna decât media.

<u>Teorema 5</u>: Fie $x_1, \dots, x_k$ vectori din R^n. Fie Pa: $R^n \to R^n$ operatorul proiectiei ortogonala de rang r care minimizeaza

$$\varepsilon^2(a) = \sum_{k=1}^{K} (x_k - a)' \bullet (I - P_a) \bullet (x_k - a).$$

Atunci $\varepsilon^2(z) \leq \varepsilon^2(a)$ unde $z = \frac{1}{K}\sum_{k=1}^{K} x_k$

<u>Demonstratie</u>:

$$e^2(a) = \sum_{k=1}^{K} (x_k - a + z - z)' \bullet (I - P_a) \bullet (x_k - a + z - z) =$$

$$= \sum_{k=1}^{K} [(x_k - z)'(I-P_a)(x_k - z) + 2(x_k - z)'(I-P_a)(z-a) + (z-a)'(I-P_a)(z-a)]$$

$$Dar \sum_{k=1}^{K} (x_k - z) = 0\ \ Deci\ e^2(a) = \sum_{k=1}^{K} (x_k - z)'(I-P_a)(x_k - z) + K(z-a)'(I-P_a)(z-a)$$

$$Acum\ e^2(z) = \sum_{k=1}^{K} (x_k - z)'(I-P_z)(x_k - z)(din\ teorema\ 3)$$

$$\sum_{k=1}^{K} (x_k - z)'(I-P_z)(x_k - z) \leq \sum_{k=1}^{K} (x_k - z)'(I-P_a)(x_k - z)$$

$$Deci\ e^2(z) \leq e^2(a) - K(z-a)'(I-P_a)(z-a)$$

$$Dar\ (z-a)'(I-P_a)(z-a) \geq 0,\ Deci\ e^2(z) \leq e^2(a)$$

Revenind la problema noastra privitoare la minimizarea erorii patrate

$$\sum_{k-1}^{K}(y_k - f(y_k))' \bullet (y_k - f(y_k))$$

putem afirma ca f trebuie sa fie operator proiectie ortogonala pe subspatiul unidimensional generat de vectorul propriu al lui $\sum_{k=1}^{K} y_k y_k'$ cu valoarea proprie cea mai mare. Fie t acest vector propriu. Cel mai rapid drum de a gasi coordonatele lui f(yk) este de a considera produsul vectorilor y_k', t. Coordonatele lui f(yk) în spatiul dimensional initial sunt (y_k', t)t. Noi suntem interesati în pozitia relativa a lui f(yk) în subspatiul unidimensional, deci numarul y_k', t. Acesta este un parametru al structurii locale sau dependentei spatiale în jurul punctului centru.

Concluzii

De fapt noi am realizat urmatoarele: neglijând marginile care au fost taiate, am luat o imagine I si din ea am gasit imaginea I^* care este **imaginea parametrilor de structura locala**. Daca I=(xik) atunci I^*=(yik) unde yik = t'xik.

Cel mai practic mod pentru luarea în consideratie a structurii într-o multime multiimagine este de a o reduce la o imagine care contine cât mai multa informatie din toate. Deoarece fiecare imagine din multimea multiimagine va fi înalt corelata cu orice alta imagine, o componenta principala facuta pe multimea multiimagine întreaga este un mod rezonabil de a îndeplini aceasta reducere. Daca I = (gik) este multimea multiimagine unde fiecare gik este un vector N×1, atunci componenta principala a imaginii I^* este definita prin: I^* = (t'gik) unde t este vectorul propriu corespunzator celei mai mari valori proprii a matricei de covarianta estimata din gik. Astfel am adaugat o dimensiune spatiului de masura corespunzatoare unei axe de structura.

Spatiul de masura G este R^{2N}, si $I: Z_X \times Z_Y \to R^{2N}$. Putem opera cu I ca si când fiecare punct este independent de vecinii sai deoarece am gasit un parametru independent al efectelor structurii spatiale locale a fiecarui punct din Zx×Zy pe fiecare imagine.

Aceasta tehnica nu se poate folosi direct pe multiimagine, din cauza problemelor practice ale înregistrarii si corectarii. Imaginile I1, I2,.., IN initial obtinute, nu pot fi transformate astfel ca printr-o simpla suprapunere sa obtinem multiimaginea. Unele imagini trebuie rotite si translatate pâna pot fi suprapuse. Acesta este procedeul de înregistrare. Uneori geometriile imagini nu coincid si trebuie facute corectii neliniare. Acesta este procesul de corectii.

Bibliografie

[1] Emil Stan, "Cuantificarea dependentei spatiale în clasificarea automata", **Informatica Economica,** Vol. VI, nr. 1, 2002

[2] Emil Stan, "Modelarea dinamica a sistemelor", Editura RDA, 1998

[3] Paul Constantinescu, C.V. Negoita, "Sistemele informatice, modele ale conducerii si sistemelor conduse, Editura Tehnica, 1972

[4] W.D. Ficher, "On grouping for Maximum Homogenity", vol.53, Dec. 1998, J. of American St. Ass.