

Probleme extremale pentru grafuri si retele de transport

Drd. Rodica MIRONENCO

A variety of problems can be constructed, using Ford-Fulkerson's maximum-flow, minimum-cut theory; in distribution networks problems: transport networks, telecommunications, electrical networks, in competition problems or in covering problems.

Keywords: transport networks, conex graph, maximum flow, minimum cut, chain, capacity function, multi-product network.

Un graf orientat $G=(X,U)$ se numeste retea de transport, daca el satisface urmatoarele conditii:

- Exista un vârful unic $a \in X$, în care nu intra nici un arc, adica $w^-(a) = \emptyset$, care desemneaza multimea arcelor care intra în vârful a ;
- Exista un vârful unic $b \in X$, din care nu iese nici un arc, adica $w^-(b) = \emptyset$, prin care se noteaza multimea arcelor care ies din vârful b ;
- G este conex si exista drumuri de la a la b în G ;
- S-a definit o functie

$$c: U \rightarrow R, c(u) \geq 0, (\forall) u \in U.$$

Vârful a se numeste intrarea retelei (sursa), vârful b se numeste iesirea retelei (destinatie), iar $c(u)$ este capacitatea arcului u .

O functie $f: U \rightarrow R, f(u) \geq 0, (\forall) u \in U$, se numeste **flux** în retea de transport G cu functia de capacitate c , care se noteaza $G=(X,U,c)$, daca sunt îndeplinite urmatoarele doua conditii:

(C). Conditia de conservare a fluxului:

Pentru orice vârful $x \neq a, b$ suma fluxurilor pe arcele care intra în x este egala cu suma fluxurilor pe arcele care ies din x , adica:

$$\sum_{u \in w^-(x)} f(u) = \sum_{u \in w^+(x)} f(u), (\forall) x \in X \setminus \{a, b\}$$

(M). Conditia de marginire a fluxului:

Pentru orice $u \in U, f(u) \leq c(u)$, adica se impune ca fluxul de la un vârful la altul sa nu depaseasca valoarea capacitatii date.

Pentru orice multime de vârfuluri $A \subset X$, definim o taietura ca fiind multimea arcelor care intra în multimea A de vârfuluri:

$$w^-(A) = \{(x, y) \mid x \notin A, y \in A, (x, y) \in U\}$$

Se noteaza cu

$$w^+(A) = \{(x, y) \mid x \in A, y \notin A, (x, y) \in U\},$$

adica multimea arcelor care ies din multimea A de vârfuluri. Capacitatea taietorii

$$w^-(A) \text{ se noteaza } c(w^-(A)) = \sum_{u \in w^-(A)} c(u).$$

Sunt importante doua proprietati, care vor fi demonstrate în continuare.

$$P_1). \sum_{u \in w^+(a)} f(u) = \sum_{u \in w^-(b)} f(u) = f(b)$$

P_2). Pentru orice multime de vârfuluri $A \subset X, a \notin A, b \in A$ fluxul $f(b)$ la iesirea retelei, verifica relatia:

$$f(b) = \sum_{u \in w^-(A)} f(u) - \sum_{u \in w^+(A)} f(u) \leq c(w^-(A))$$

Calculam în doua moduri suma:

$$\sum_{x \in X} \left(\sum_{u \in w^-(x)} f(u) - \sum_{u \in w^+(x)} f(u) \right) \quad (1)$$

Datorita conditiei de conservare a fluxului pentru orice vârful $x \neq a, b$, termenul corespunzator al sumei este nul. Deci suma se reduce la: $\sum_{u \in w^-(b)} f(u) - \sum_{u \in w^+(a)} f(u)$, deoarece

$$w^-(a) = w^+(b) = \emptyset.$$

Dar, fiecare arc

$$(x, y) \in U \Rightarrow (x, y) \in w^+(x) \cap w^-(y);$$

de aici, rezulta, regrupând termenii:

$$\sum_{u \in U} (f(u) - f(u)) = 0 \text{ si rezulta } P_1.$$

Pentru a demonstra P_2 , consideram suma:

$$\sum_{x \in A} \left(\sum_{u \in w^-(x)} f(u) - \sum_{u \in w^+(x)} f(u) \right) \quad (2)$$

Pentru orice vârf, $x \neq b$, termenul corespunzător al sumei de mai sus, deci suma, se reduce la:

$$\sum_{u \in U_A} (f(u) - f(u)) + \sum_{u \in w^-(A)} f(u) - \sum_{u \in w^+(A)} f(u) = \sum_{u \in w^-(A)} f(u) - \sum_{u \in w^+(A)} f(u)$$

unde s-a notat prin U_A -multimea arcelor cu ambele extremități în A .

Dacă arcul $u \in w^-(A)$, fluxul $f(u)$ apare în (2) cu semnul plus, iar dacă $u \in w^+(A)$,

$$\text{Rezulta } f_b = \sum_{u \in w^-(A)} f(u) - \sum_{u \in w^+(A)} f(u) \leq \sum_{u \in w^-(A)} f(u) \leq \sum_{u \in w^-(A)} c(u) = c(w^-(A)),$$

folosind condiția de marginire a fluxului pe fiecare arc al rețelei de transport, fluxul având valori nenegative.

Teorema lui Ford-Fulkerson:

Pentru orice rețea de transport $G = (X, U, c)$ cu intrarea a și ieșirea b , valoarea maximă a fluxului la ieșire este egală cu capacitatea minimă a unei tăieturi: $\max_f f_b = \min_{A \setminus a \neq A, b \in A} c(w^-(A))$.

Pentru demonstrație considerăm v un lant care unește intrarea a cu ieșirea b .

Se notează cu v^+ multimea arcelor lui v , orientate de la a la b , iar cu v^- multimea arcelor lui v orientate în sens invers cu sensul de parcurgere al lantului v de la a la b .

$$\text{Fie } e = \min \left(\min_{u \in v^+} (c(u) - f(u)), \min_{u \in v^-} f(u) \right)$$

Dacă $e > 0$, vom mari fluxul f_b cu e pe fiecare arc $u \in v^+$ și vom micșora cu e , pe fiecare arc $u \in v^-$. Vom obține un nou flux f' , care verifică:

$0 \leq f'(u) \leq c(u), (\forall) u \in U$ și condiția de conservare în fiecare vârf $x \neq a, b$.

Fluxul la ieșire crește $f'_b = f_b + e > f_b$, ultimul arc al lantului v care intră în b , apar-

$$\sum_{u \in w^-(b)} f(u) = f_b, \text{ deoarece } w^+(b) = \emptyset, a \notin A$$

Regrupând termenii, putem scrie:

$f(u)$ apare în (2) cu semnul minus, deoarece vor exista vârfurile

$$x_1, x_2 \in A, u \in w^-(x_1) \cap w^+(x_2).$$

ținând multimeii v^+ . Un lant v , pentru care $e = 0$, se numește saturat.

Dacă f este un flux maxim în rețeaua G , considerăm toate lanturile elementare de la a la b . Suprimăm toate arcele u pentru care există un lant elementar v , astfel încât:

$$u \in v^+, f(u) = c(u) \text{ sau } u \in v^-, f(u) = 0$$

(un astfel de arc este primul când ne deplasăm pe lantul v de la a la b)

Obținem un graf parțial care are cel puțin două componente conexe, deoarece, în caz contrar, ar mai exista un lant nesaturat de la a la b , ceea ce contrazice maximalitatea fluxului f . Notăm cu A -multimea vârfurilor unei astfel de componente, care conține ieșirea b și nu conține intrarea a .

A -definește tăietura $w^-(A)$. Arcele $u \in w^-(A)$ au aceeași orientare cu lanturile de la a la b , astfel încât $f(u) = c(u)$. Pentru $(\forall) u \in w^+(A), f(u) = 0$, acestea având o orientare opusă orientării lanturilor de la a la b , care folosesc aceste arce.

Arcele din $w^-(A)$ sau $w^+(A)$ au fost arce suprimate din rețea, deoarece, în caz contrar, componenta conexă A nu ar fi maximală în raport cu incluziunea, ceea ce contrazice definiția unei componente conexe.

Obținem:

$$f_b = \sum_{u \in w^-(A)} f(u) - \sum_{u \in w^+(A)} f(u) = \sum_{u \in w^-(A)} c(u) = c(w^-(A))$$

Dar, $f_b \leq c(w^-(A))$, pentru orice flux f si orice taietura indusa de multimea $A \subset X, a \notin A, b \in A$. Rezulta ca taietura $w^-(A)$ are capacitatea minima, egala cu valoarea maxima a fluxului la iesire.

Algoritm pentru obtinerea unui flux maxim:

Vom considera ca functia de capacitate $c(u) \geq 0$, ia numai valori intregi.

1). Se defineste fluxul initial având componente nule pe fiecare arc al rețelei:

$$f(u) = 0, (\forall) u \in U$$

2). Se determina lanturile nesaturate de la a la b pe care fluxul poate fi marit, prin urmatorul procedeu de etichetare:

- Se marcheaza intrarea cu $[+]$;
- Un vârș x fiind marcat, se va marca cu $[+x]$, oricare vârș y nemarcat, cu proprietatea ca arcul $u = (x, y)$ este nesaturat, adica $f(u) < c(u)$, iar cu $[-x]$, oricare vârș y remarcat cu proprietatea ca arcul $u = (x, y)$ are un flux nenul.

Daca prin acest mod de marcare se eticheteaza iesirea b , nu avem un flux maxim la

pasul curent. Vom considera un lant format din vârșuri etichetate în sensul de la a la b , notat v .

Se determina

$$e = \min(\min_{u \in v^+} (c(u) - f(u)); \min_{u \in v^-} f(u)); e > 0$$

Marim fluxul cu e pe fiecare arc $u \in v^+$ si micșoram cu e fluxul pe arcele $u \in v^-$, astfel încât fluxul la iesire va avea valoarea $f_b + e$.

Se repeta 2). cu fluxul nou obtinut.

Demonstram ca la iesire, prin acest procedeu de etichetare, fluxul va avea valoarea maxima, iar multimea arcelor care unesc vârșurile marcate cu vârșurile care nu au putut fi marcate, constituie o taietura de capacitate minima.

Se ajunge la acest rezultat dupa un numar finit de pasi.

Din proprietatile anterioare, pentru orice taietura a rețelei $w^-(A)$,

$$\max f_b \leq c(w^-(A)).$$

$$\text{Luam } A = \{b\}, \text{ deci } w^-(A) = w^-(b) \Rightarrow \max_f f_b \leq c(w^-(A)) = \sum_{u \in w^-(b)} c(u).$$

Se pleaca initial cu fluxul nul pe fiecare arc si la fiecare pas fluxul f_b creste cu e .

Cum capacitatea arcelor este un întreg nenegativ, valorile fluxului pe arce si a lui e sunt întregi, deci $e \geq 1$. La fiecare pas, fluxul f_b creste cu o unitate, numarul pasilor este finit, fiind majorat de capacitatea unei taieturi.

Daca notam prin A multimea vârșurilor ca-

re nu au fost etichetate prin algoritmul descris, obtinem o taietura $w^-(A)$ a rețelei de transport cu $a \notin A, b \in A$.

Pentru orice $u \in w^-(A)$, avem $f(u) = c(u)$, $u = (x, y)$, $x \notin A, y \in A$.

Daca am avea $f(u) < c(u)$, atunci vârșul y ar putea fi etichetat, contradictie cu $y \in A$.

Pentru $(\forall) u \in w^+(A) \Rightarrow f(u) = 0, u = (y, x), y \in A, x \notin A$.

Daca $f(u) > 0$, y ar fi etichetat, contradictie cu $y \in A$.

$$\text{Obtinem: } f_b = \sum_{u \in w^-(A)} f(u) - \sum_{u \in w^+(A)} f(u) = \sum_{u \in w^-(A)} c(u) = c(w^-(A)).$$

Deoarece pentru fluxul si orice taietura $w^-(A)$ gasita, inegalitatea $f_b \leq c(w^-(A))$

este chiar egalitate, rezulta ca fluxul este

maxim, iar taietura are o capacitate minima.

În cazul când capacitatile arcelor sunt numere rationale, problema poate fi reduisa la cea anterioara, procedând în felul urmator:

Notam $c(u_i) = \frac{p_i}{q_i}, q_i \geq 0, i = \overline{1, m}, p_i, q_i$ -

numere întregi nenegative. Vom înmulti capacitatea arcelor cu $[q_1, q_2, \dots, q_m]$. Obținem o retea de transport având acelasi graf si capacitatile tuturor arcelor exprimate prin numere întregi.

$$f(u) = g(u)[q_1, q_2, \dots, q_m]$$

Din $\sum_{u \in w^-(x)} f(u) = \sum_{u \in w^+(x)} f(u), (\forall) x \neq a, b$ se

obține: $\sum_{u \in w^-(x)} g(u) = \sum_{u \in w^+(x)} g(u)$

Iar din $0 \leq f(u) \leq [q_1, q_2, \dots, q_m]c(u)$ se obține: $0 \leq g(u) \leq c(u), (\forall) u \in U$.

Daca f_b este maxim în rețeaua G_1 , atunci g_b este maxim în rețeaua G .

Afirmatia este demonstrata presupunând contrariul.

Presupunem ca exista un flux h în rețeaua G , astfel încât: $h_b > g_b$

Vom defini apoi fluxul ce are componentele $[q_1, q_2, \dots, q_m]h(u), (\forall) u \in G_1$.

Am obtinut

$[q_1, q_2, \dots, q_m]h_b > [q_1, q_2, \dots, q_m]g_b = f_b$, ceea ce contrazice maximalitatea lui f , deci, g este maxim în rețeaua G daca si numai daca f este maxim în rețeaua G_1 .

Fluxul f poate fi determinat cu algoritmul prezentat, ce are un numar finit de pasi, deoarece în rețeaua G_1 toate capacitatile arcelor sunt numere întregi.

Observatii:

Algoritmul prezentat nu are neaparat un numar finit de pasi si nu conduce întotdeauna la flux maxim la iesire, daca functia de capacitate a arcelor $c: U \rightarrow R$ ia valori irrationale.

(L.R. Ford, D.R. Fulkerson, "Flows in

Networks", Princeton Univ. Press, 1962)

O problema de flux maxim poate avea mai multe surse si mai multe destinatii, iar aceasta se poate reduce la o problema de flux maxim într-o retea cu o singura sursa si o singura destinatie. Adaugam o noua sursa (supersursa) s si arcele orientate (s, x_i) , cu capacitatea $c(s, x_i) = \infty$, pentru $i = 1, 2, \dots, m$ si o noua destinatie t si arcele orientate (y_j, t) , cu capacitatea $c(y_j, t) = \infty, j = 1, 2, \dots, n$.

Modelele analizate de retea de transport permite lucrul cu fluxuri cu un singur tip de produs. O retea de transport multi-produs permite lucrul cu p produse, între o multime de p vârfuri sursa $S = \{x_1, x_2, \dots, x_p\}$ si o multime de p vârfuri destinatie $T = \{y_1, y_2, \dots, y_p\}$.

Fluxul celui de-al i -lea produs de la x la y se noteaza prin $f_i(x, y)$.

Proprietatea de conservare este valabila independent pentru fiecare produs în parte: fluxul pentru fiecare produs este zero în fiecare vârf diferit de sursa si destinatia produsului respectiv. Suma fluxurilor de la x la y pentru toate produsele nu poate depasi capacitatea $c(x, y)$. Valoarea fluxului pentru fiecare produs este fluxul în vârful sursa pentru produsul respectiv, iar valoarea fluxului total este suma valorilor pentru cele p fluxuri.

Metoda lui Ford-Fulkerson se bazeaza pe trei idei importante: rețele reziduale, drumuri de ameliorare si taieturi. Este o metoda iterativa. Rețeaua reziduala se poate spune intuitiv ca este formata din arcele care admit un flux mai mare.

Cantitatea de flux additional care poate fi transportata de la x la y , fara a depasi capacitatea $c(x, y)$ este capacitatea reziduala a arcului (x, y) .

$$c_f(x, y) = c(x, y) - f(x, y)$$

Data fiind o retea de transport $G=(X, U)$ si un flux f , rețeaua reziduala a lui G indus de f este

$$G_f = (X, U_f), U_f = \{(x, y) \in X \times X, c_f(x, y) > 0\}$$

Dându-se o rețea de transport $G=(X,U)$ și un flux f , un drum de ameliorare este un drum simplu de la intrarea a la ieșirea b în rețeaua reziduală G_f . Fiecare arc (x,y) pe un drum de ameliorare admite un flux pozitiv adițional, fără a încălca restricția de capacitate.

Vom numi capacitate reziduală a lui p , cantitatea maximă a fluxului care se poate transporta de-a lungul drumului de ameliorare p și este dată de :

$$c_f(p) = \min\{c_f(x,y) \mid (x,y) \in p\}$$

Metoda lui Ford-Fulkerson mărește fluxul în mod repetat de-a lungul drumurilor de ameliorare, până când ajunge la un flux maxim.

Teorema de flux maxim- tăietură minimă, exprimă faptul că un flux este maxim dacă și numai dacă în rețeaua lui reziduală nu există nici un drum de ameliorare.

Analiza timpului de execuție a algoritmului Ford-Fulkerson.

Timpul de execuție a algoritmului depinde de modul de determinare a drumului de ameliorare p . Dacă drumul este ales greșit, se poate întâmpla ca algoritmul nu se oprește după un număr finit de pași, valoarea fluxului crește succesiv, dar nu converge către valoarea maximă. Se va folosi un algoritm de căutare în lățime, unul din cei mai simpli algoritmi de căutare într-un graf.

Timpul de găsire a unui drum în rețeaua reziduală este $O(U)=O(E)$, unde $G=(X,U)$,

$$E = \{(x,y) \mid (x,y) \in U \text{ sau } (y,x) \in U\}.$$

Fiecare iterație a ciclului se execută în $O(U)$ unități de timp, timpul total este de $O(U|f^*|, |f^*|)$ - este fluxul maxim obținut.

Atât timp cât valoarea optimă a fluxului este mică și capacitățile sunt numere întregi sau raționale, timpul de execuție al algoritmului este bun. Perfectionarea algoritmului Ford-Fulkerson poate fi îmbunătățită, dacă implementăm căutarea drumului de ameliorare p printr-o căutare în lățime, adică cel mai scurt drum. Această implementare se numește algoritmul lui Edmond-Karp.

Cei mai rapizi algoritmi de flux maxim până la ora actuală sunt algoritmi de preflux, cu ajutorul cărora se pot rezolva eficient și alte probleme de flux, cum ar fi problema fluxului de cost minim. Astfel, amintim algoritmul generic de flux maxim al lui Goldberg, care are o implementare simplă, ce se execută într-un timp $O(X^2U)$, îmbunătățind limita de $O(XU^2)$ a algoritmului Edmond-Karp sau o rafinare a algoritmului generic, numit algoritmul mutare în față, care este un algoritm de preflux de complexitate temporală $O(X^3)$ -asimptotic cel puțin la fel de bun ca și $O(X^2U)$.

Bibliografie

1. Tomescu I. "Probleme de combinatorică și teoria grafurilor", 1981, Editura Didactică și Pedagogică, București.
2. Thomas H. Cormen, Charles E. Leiserson, Ronald R. Rivest, "Introduction to Algorithms", 1990, Massachusetts Institute of Technology.
3. Kenneth H. Rosen, "Handbook of Discrete and Combinatorial Mathematics", 2000, CRC Press.