Nucleul unei economii de piata cu productie

Conf.dr. Stelian STANCU
Catedra de Cibernetica Economica, A.S.E. Bucuresti

This article presents details of market with production. We define a Walrasian equilibrium and optimal Pareto equilibrium for this economy. We presents also for this economy, the links among kernel of economy, Walrasian equilibrium and Pareto optimum. The article explains these connections giving many examples.
***Keywords**: economy with production, competition, equilibrium, Pareto optimum, Walrasian equilibrium, kernel of economy.*

1 Definirea economiei de piata cu productie

Fie economia A formata din N consumatori, n - marfuri si F - firme producatoare. Fie, de asemenea, $C = \{1,2,...i,..., N\}$ - multimea consumatorilor si $P = \{1,2,..., f,...F\}$ - multimea producatorilor. Se fac urmatoarele notatii suplimentare:

- Y_f - multimea productiilor posibile la nivelul firmei f, $f = 1,2,..., F$, cu $Y_f \subset R^n$;
- y_f - vectorul de productie posibil la nivelul firmei f, $f \in P$ (deci $y_f \subset Y_f$);

$$y_f = \begin{pmatrix} y_{f1} \\ y_{f2} \\ \vdots \\ y_{fj} \\ \vdots \\ y_{fn} \end{pmatrix}$$

cu $y_{fj} > 0$ - însemnând ca bunul j este obtinut de firma f; $y_{fj} < 0$, bunul j este input pentru firma f; $y_{fj} = 0$, bunul j fie nici nu se produce, nici nu se consuma, fie cât se produce se si consuma în procesul tehnologic; $p_f(p^*) = \max_{y_f \in Y_f} py_f$ - reprezinta profitul maxim la nivelul firmei f;

$$Y = \{y \subset R^n / y = \sum_{f=1}^{F} y_f, y_f \in Y_f\} = \sum_{f=1}^{F} Y_f \text{ -}$$

reprezinta multimea productiilor totale la nivelul economiei A. $\mathbf{Y}= \underset{f}{X}\, Y_f$ (produs cartezian dupa f din Y_f)- reprezinta multimea alocatiilor de productie posibile, la nivelul economiei A.

În acest caz, când exista si productie, vectorul de consum la nivelul consumatorului i este dat de:

$$x_i = \begin{pmatrix} x_{i1} \\ x_{i2} \\ \vdots \\ x_{ij} \\ \vdots \\ x_{in} \end{pmatrix}, \text{ cu } x_{ij} \geq 0,\ (\forall)\, j = \overline{1,n},\ j \neq k$$

si $x_{ik} < 0$, reprezinta consumul de forta de munca.

Ca urmare, restrictia de buget va avea urmatoarea forma:

$$RB_i(p) = \{x_i \in X_i / px_i \leq M_i\} \qquad (1)$$

unde M_i - reprezinta venitul gospodariei i, si anume

$$M_i = p\bar{x}_i + \sum_{f=1}^{F} d_{if}(p_f(p^*)) \qquad (2)$$

$p\bar{x}_i$ - venitul din dotarea initiala;

$\sum_{f=1}^{F} d_{if}(p_f(p^*))$ - venitul din profitul firmelor, la care gospodaria i detine actiuni;

Termenul d_{if} - reprezinta partea din profitul firmei f ce revine consumatorului i, cu: $\sum_{i=1}^{N} d_{if} = 1$, iar $p_f(p^*)$ reprezinta profitul firmei f

Dar cum $px_i = \sum_{j=1}^{n} p_j x_{ij} = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n} p_j x_{ij} + p_k x_{ik}$,

se deduce ca restrictia de buget devine:

$\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n} p_j x_{ij} \le p_k(-x_{ik}) + \sum_{j=1}^{n} p_j \bar{x}_{ij} + \sum_{f=1}^{F} d_{if} p_f(p^*)$. $(2')$

Definitia 1. *(definirea economiei de piata cu productie)***:** Multimea:

$A := \{\{p, X_i, PS_i, \bar{x}_i \,/\, i \in C\}, \{Y_f \,/\, f \in P\}\}$ (3)

reprezinta o economie de piata cu productie, daca:

a) sunt îndeplinite ipotezele a) - d) de la definitia economiei de schimb pur;

b) în plus avem:

b1) $0 \in Y_f$, adica firma f are posibilitatea de a nu desfasura nici o activitate;

b2) Y_f este o multime închisa, adica daca $\{y_f^t\}_t$ este un sir de productii posibile si daca y_f^t este apropiata de y_f^0, atunci rezulta ca si vectorul de productie y_f^0 este posibil;

b3) Y_f este o multime convexa, adica oricare ar fi y_f^1 si y_f^2 apartinând multimii Y_f atunci si $l\, y_f^1 + (1-l) y_f^2 \in Y_f$, $(\forall) l \in [0,1]$. Aceasta ipoteza de convexitate a multimii Y_f atrage dupa sine divizibilitatea si aditivitatea bunurilor din Y_f.

2. Echilibrul Walrasian si optimul Pareto într-o economie de piata cu productie

Fie multimea alocatiilor de consum X si multimea alocatiilor de productie Y, definite în mod uzual si $w = (x, y)$ o alocatie de consum si de productie la nivelul economiei A, cu:

$$x \subset X, x = (x_1, x_2, ..., x_N)$$
$$y \subset Y, y = (y_1, y_2, ..., y_F)$$

reprezentând cele doua alocatii.

Definitia 2. Alocatia $w = (x, y)$ de consum si de productie, definita la nivelul economiei A:

$A := \{\{p, X_i, PS_i, \bar{x}_i \,/\, i \in C\}, \{Y_f \,/\, f \in P\}\}$

este fezabila, daca sunt îndeplinite urmatoarele conditii:

a) $x_i \in X_i$ si $y_f \in Y_f$, oricare ar fi $C, f \in P$, adica fiecare vector de consum si de productie din alocatia de la nivelul economiei A, este posibil.

b) $\sum_{i\in C} x_i \le \sum_{f\in P} y_f + \sum_{i\in C} \bar{x}_i$ (4)

adica cererea totala din fiecare bun, la nivelul economiei, nu trebuie sa depaseasca oferta totala - care este formata din oferta de productie si oferta din dotarea initiala.

Relatia (4) mai poate fi scrisa, în termeni ai cererii nete, la nivelul economiei A:

$$\sum_{i\in C} \Delta_{\bar{x}} x_i \le \sum_{f\in P} y_f \quad (4')$$

Se noteaza cu:

$$F(A, C, P): \left\{ w = (x, y) \in X \times Y \,/ \sum_{i\in C} \Delta_{\bar{x}} x_i \le \sum_{f\in P} y_f, x_i \in X_i, y_f \in Y_f, i \in C, f \in P \right\}$$

multimea alocatiilor de consum si de productie fezabile la nivelul economiei cu productie A.

Definitia 3. Alocatia (p^*, x^*, y^*) reprezinta un echilibru Walrasian, pentru economia de piata cu productie A, daca sunt îndeplinite urmatoarele conditii:

a) $p^* > 0$;

b) $w^* = (x^*, y^*) \in F(A, C, P)$, adica alocatia de consum si productie este.posibila la nivelul economiei;

c) $x_i^* \in D_i(p^*), (\forall) i \in C$, deci la nivelul fiecarui consumator i, se obtine utilitatea maxima;

d) $\sum_{i\in C} \Delta_{\bar{x}} x_i^* = \sum_{f\in P} y_f^*$, cu $y_f^* \in S_f(p^*)$, adica cererea neta din fiecare bun, la nivelul economiei, este egala cu oferta, cu vectorul oferta y_f^* ce maximizeaza profitul la nivelul fiecarei firme f.

Observatie: Echilibrul Walrasian (p^*, x^*, y^*) mai este cunoscut si sub denumirea de echilibru concurential (competitiv sau necompensat).

Exemplul 1. Fie economia A formata din doi consumatori, $C = \{1,2\}$, doua firme $P = \{1,2\}$ si doua bunuri (n=2).
Preferintele consumatorilor sunt reprezentate prin functiile de utilitate:
$U_i(x_{i1}, x_{i2}) = x_{i1}^a - x_{i2}^{1-a}$, $i = 1,2$, iar dotarea initiala la nivelul fiecarui consumator este:
$\overline{x}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, oricare ar fi $i = 1,2$.
Multimea productiilor posibile la nivelul economiei este:

$$Y = \left\{ y = \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \end{pmatrix} \in \Re^2 / y^1 \le 0, y^2 \le -2y^1 \right\},$$

deci la nivelul agregat al economiei, bunul 1 constituie singurul input folosit pentru obtinerea bunului 2.
Fie functiile cererii la nivelul fiecarui consumator: $D_1(p) = \begin{pmatrix} -5 \\ \dfrac{5p_1}{p_2} \end{pmatrix}$, $D_2(p) = \begin{pmatrix} -2 \\ \dfrac{3p_1}{p_2} \end{pmatrix}$
si $p = (p_1, p_2)$ vectorul preturilor pentru cele doua bunuri, cu $p_1 + p_2 = 1$.
Din definitia echilibrului Walrasian, vom avea ca cererea efectiva din bunul 1 la nivelul economiei A este:
$y^{1*} = x_{11}(p) + x_{21}(p) = -5 - 2 = -7 \le 0$,
iar pentru bunul 2, din conditia de echilibru a cererii cu oferta se deduce:

$$y^2 = \frac{5p_1}{p_2} + \frac{3p_1}{p_2} = \frac{8p_1}{p_2}.$$

Presupunând $p^* = (0,5,\ 0,5)$ rezulta ca $y^{2*} = 8 > 0$ si $y^{2*} \le -2y^{1*}$ (adevarat).
Deci, alocatia de productie optima la nivelul economiei în echilibru Walras este

$$y^* = \begin{pmatrix} -7 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Înlocuind vectorul preturilor $p^* = (0,5,\ 0,5)$ în $D_i(p^*)$ se obtine alocatia de consum la echilibru, $x^* = \left(\begin{pmatrix} -5 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$.

Optimul Pareto (OP(A))
În economia de piata cu productie A, optimul Pareto este de aceeasi forma cu cel determinat pentru o economie de schimb pur.
Definitia 4. O alocatie de consum si productie $w = (x, y)$, fezabila, este dominata în sens Pareto, daca exista o alta alocatie $w' = (x', y')$, fezabila, la nivelul economiei A pentru care $x_i' \succ_i x_i$, $(\forall) i \in C$.
Se noteaza cu:

$$Dom(A,C,P) := \{w \in F(A,C,P) / (\exists) w' = (x', y') \in F(A,C,P)\} \text{ a.î} x_i' \succ_i x_i, (\forall)\, i \in C\} \quad (5)$$

Cu aceasta definitie, a alocatiei de consum si productie $w' = (x', y')$ dominata în sens Pareto, se poate caracteriza alocatia w din punct de vedere al optimului Pareto.
Definitia 5. O alocatie $w = (x, y)$ reprezinta un optim Pareto daca:
a) $w = (x, y)$ este fezabila;
b) alocatia $w = (x, y)$ nu este dominata de nici o alocatie $w' = (x', y') \in F(A,C,P)$
Deci $OP := F(A,C,P) \setminus Dom(A,C,P)$ (6)
Între echilibrul Walrasian si optimul Pareto exista urmatoarea relatie:
Teorema 1. Pentru o economie de piata cu productie A avem ca:

$$EW^w(A) \subset OP(A). (7)$$

Demonstratie:
Se face prin reducere la absurd.
Fie (p^*, x^*, y^*) echilibrul Walrasian, dar $(x^*, y^*) \notin OP(A)$.
Din definitia optimului Pareto, rezulta ca $(x^*, y^*) \in Dom(A,C,P)$, adica exista o alocatie $(x', y') \in F(A,C,P)$ astfel încât $x' \succ_C x^*$.
Rezulta deci ca $\Delta_{\overline{x}} x_i' \in \Delta_{\overline{x}} PS_i(x_i)$, $(\forall) i \in C$.
Din definitia echilibrului Walra-sian avem ca $p \Delta_{\overline{x}} x_i' > 0$ si deci:

$$p \cdot \sum_{i \in C} \Delta_{\overline{x}} x_i' \cdot x_i' = py' > 0 \quad (8)$$

Din ipoteza ca $x' \in F(A,C,P)$ rezulta ca:
$y' := \sum_{i \in C} \Delta_{\bar{x}} \cdot x'_i \in Y$ cu $p \cdot y' \leq 0$. (8′)
Din relatiile (8) si (8′) se constata contradictia, de unde rezulta ca: $EW^w(A) \subset OP(A)$.

3. Nucleul unei economii de piata cu productie
Fie $S = S_1 \cup S_2$, cu S - reprezentând o coalitie a consumatorilor (S_1) si firme (S_2) si Y_{S_2} - multimea productiilor agregate posibile la nivelul coalitiei S_2 (coalitie de firme), cu
$Y_{S_2} \subset Y$, $S_2 \subset S$.
Definitia 6. O alocatie de consum si de productie $w = (x, y)$ este fezabila pentru coalitia S daca:
a) $\begin{cases} x_i \in X_i, (\forall) i \in S_1 \\ y_f \in Y_f, (\forall) f \in S_2 \end{cases}$
b) $\sum_{i \in S_1} \Delta_{\bar{x}} x_i \leq \sum_{f \in S_2} y_f$.
Se noteaza cu:

$$F(A,S) := \left\{ (x,y) / \sum_{i \in S_1} \Delta_{\bar{x}} x_i \leq \sum_{f \in S_2} y_f, x_i \in X_i, y_f \in Y_f, (\forall) i \in S_1, f \in S_2 \right\}$$

Definitia 7. O alocatie de consum si de productie $w = (x, y)$ este dominata de coalitia $S = S_1 \cup S_2$, cu $S_1 \neq \emptyset$, $S_2 \neq \emptyset$, daca exista o alocatie $w' = (x', y') \in F(A,S)$ astfel încât $x'_i \succ_i x_i$, $(\forall) i \in S_1$.
Fie multimea alocatiilor de consum si productie dominate în raport cu coalitia S, notata:

$$Dom(A,S) = \{ w = (x,y) \in F(A,S) / (\exists) w' = (x',y') \in F(A,S) \text{ a.î. } x'_i \succ_i x_i, (\forall) i \in S_1 \}.$$

Definitia 8. O alocatie de consum si productie $w^* = (x^*, y^*)$ se gaseste în nucleul economiei A, daca:
a) $w^* = (x^*, y^*)$ este fezabila;
b) $w^* = (x^*, y^*)$ nu este dominata de nici o coalitie.
Cu notatiile deja utilizate, avem ca nucleul unei economii A cu productie si consum este:
$N(A) = F(A,C,P) \setminus (\text{U } Dom(A,S))$ (9)
$S_1 \subset C$ $S_2 \subset P$ unde $S = S_1 \cup S_2$.
Exista, totodata, urmatoarea legatura între nucleul unei economii A cu productie si consum, echilibrul Walrasian si optimul Pareto pentru aceeasi economie.
Teorema 2. Pentru o economie de piata cu productie A, este adevarata urmatoarea relatie:
$EW^w(A) \subset N(A) \subset OP(A)$. (10)
Demonstratie:
Din definitia nucleului economiei A si a optimului Pareto se deduce cu usurinta ca $N(A) \subset OP(A)$.
Pentru a demonstra incluziunea $EW^w(A) \subset N(A)$, fie tripletul (p^*, x^*, y^*), de unde rezulta ca:
$\Delta_{\bar{x}} PS_i(x^*_i) \subset \{ x^*_i \in X_i / p^* \cdot x^*_i > 0 \}$, $(\forall) i \in C$.
Fie coalitia $S = S_1 \cup S_2$, cu $S_1 \subset C$ si $S_2 \subset P$ si $z \in \sum_{i \in S_1} \Delta_{\bar{x}} PS_i(x^*_i)$, cu $z = \sum_{f \in S_2} \Delta_{\bar{x}} y^*_f$,
unde: $\sum_{f \in S_2} \Delta_{\bar{x}} y^*_f = \sum_{f \in S_2} y^*_f - \sum_{i \in S_1} \bar{x}_i$.
Deoarece $(p^*, x^*, y^*) \in EW^w(A)$ rezulta ca:
$p^* \cdot z = \sum_{f \in S_2} p^* \cdot \Delta_{\bar{x}} y^*_f > 0$ si deci $z \notin Y_{S_2} \subset Y$.
Este adevarata, astfel, urmatoarea relatie:

$$\sum_{i \in S_1} \Delta_{\bar{x}} PS_i(x^*_i) \cap Y = \emptyset$$

si cum $Y_{S_2} \subset Y$ rezulta ca:

$$\sum_{i \in S_1} \Delta_{\bar{x}} PS_i(x^*_i) \cap Y_{S_2} = \emptyset.$$

Cum alegerea coalitiei $S = S_1 \cup S_2$ a fost facuta în mod arbitrar, se deduce ca:
$\sum_{i \in S_1} \Delta_{\bar{x}} PS_i(x^*_i) \cap Y_{S_2} = \emptyset$, $(\forall)$ $S = S_1 \cup S_2$,
cu $\begin{cases} S_1 \subset C \\ S_2 \subset P \end{cases}$ si deci $w^* = (x^*, y^*) \in N(A)$.

Bibliografie

[1] Kreps D., *A Course in Microeconomic Theory,* Princeton University Press,1990
[2] Laffont J.J., *Cours de theorie economique, II: Economie de l' incertain et de I'information,* Ed. Economica, Paris, 1988
[3] Laffont J.J., Tirole J., *A Theory of Incentives in Procurement and Regulation,* M.I.T. Press, 1993
[4] Salanie B. *Teorie des contrats*, Ed. Economica, Paris, 1994
[5] Tirole J., *Industrial Organization,* M.I.T. Press, 1988