Tehnici de filtrare utilizând reprezentarea multirezolutie a semnalelor

Lect.dr. Catalina-Lucia COCIANU
Catedra de Informatica Economica, A.S.E. Bucuresti

The multiresolution representation of the imagistic signals allows to derive some techniques in order to remove the noise distributed normal/Poison. The multiresolution algorithms are based on the following idea. For each resolution level $i, 1 \le i \le p$, *a binary image* M_i *is determined such that* $M_i(x,y)=1$ *if and only if the wavelet coefficient* $w_i(x,y)$ *is statistically significant, where p is the number of multiresolution levels. Then the filtering step of the noise removal algorithms sets each* $w_i(x,y)$ *on 0 if and only if* $M_i(x,y)=0$.
Keywords: multiresolution support, wavelet coefficient, filtering technique, statistically significant coefficient, sampling.

1 Constructia multimilor suport

Suportul multirezolutie este o structura de date pe baza careia sunt definiti algoritmi de filtrare a zgomotului. Procedura de constructie a multimilor suport consta în determinarea coeficientilor wavelet statistic semnificativi. Imaginile obtinute prin procedurile de filtrare sau de deconvolutie utilizând multimile suport asociate sunt variante neperturbate ale imaginilor initiale.

Definitie Suportul multirezolutie de la nivelul de rezolutie *j* în pozitia (*x*,*y*) din imaginea de intrare *I* este definit prin,

$M(I; j, x, y) = 1 \Leftrightarrow$ *I* contine informatie semnificativa la nivelul *j* în (*x*,*y*).

Algoritmul generic pentru calculul suportului multirezolutie a unei imagini *I* utilizând functia generatoare y este,

Pas 1. calculeaza transformata wavelet a imaginii pe baza functiei y

Pas 2. pentru fiecare nivel de rezolutie *j* ti pozitie (*x*,*y*) din *I*, calculeaza $M(I; j, x, y)$ pe baza coeficientilor wavelet statistic semnificativi

În continuare este prezentat algoritmul "À Trous" pentru calculul transformatei wavelet a unui semnal în cazul unidimensional, precum si extensia acestuia în cazul semnalelor imagistice. Constructia algoritmului "À Trous" are la baza functia wavelet generatoare definita prin intermediul unei functii de scalare care îndeplineste proprietatea de dilatare.

2. Algoritmul "À Trous"

Fie $\{c_0(k)\}$ semnalul esantionat, definit pe baza functiei f prin,

$$c_0(k) = \langle f(x), \phi(x-k) \rangle,$$

unde f este o functie de scalare, corespunzatoare unui filtru trece-jos si care satisface proprietatea de dilatare,

$$\frac{1}{2}\phi\left(\frac{x}{2}\right) = \sum_l h(l)\phi(x-l), \quad h \text{ filtru}$$

trece-jos cu valori discrete.

La nivelul de rezolutie *j* este definita multimea $\{c_j(k)\}$, unde

$$c_j(k) = \frac{1}{2^j}\left\langle f(x), \phi\left(\frac{x-k}{2^j}\right)\right\rangle$$

Prin utilizarea proprietatii de dilatare a functiei f, obtinem,

$$c_j(k) = \sum_l h(l) c_{j-1}(k + 2^{j-1} l)$$

Diferenta dintre doua niveluri de rezolutie consecutive este,

$$(1)\ \omega_j(k) = c_{j-1}(k) - c_j(k).$$

Relatia (1) este rescrisa în termenii coeficientilor transformatei wavelet discrete cu functia generatoare y, [8]

$$(2)\ \omega_j(k) = \frac{1}{2^j}\left\langle f(x), \psi\left(\frac{x-k}{2^j}\right)\right\rangle,$$

unde $\frac{1}{2}\psi\left(\frac{x}{2}\right) = \phi(x) - \frac{1}{2}\phi\left(\frac{x}{2}\right)$.

Algoritmul pentru calculul coeficientilor wavelet utilizând nivelurile de rezolutie $1,2,...,p$, p parametru dat, este, [8]

Intrare: Multimea $\{c_0(k)\}$

Pentru j=0,1,…,p

Pas 1. j=j+1; calculeaza $c_{j-1}(k)$ prin convolutie cu filtrul h, prin

$$c_j(k)=\sum_l h(l)c_{j-1}(k+2^{j-1}l)$$

Pas 2. Calculeaza $\omega_j(k)=c_{j-1}(k)-c_j(k)$

Iesire: Multimea $\{\omega_j(k),c_p\}_{j=1,...,p}$

Observatie Pentru calculul valorilor $c_j(k)$ la pasul 1 al algoritmului "À Trous" este impusa

a) conditia de periodicitate, $c_j(k+N)=c_j(k)$ sau
b) o proprietate de tip continuitate, $c_j(k+N)=c_j(N)$

Reconstructia semnalului initial pe baza coeficientilor astfel determinati este realizata prin,

$$c_0(k)=c_p+\sum_{j=1}^{p}\omega_j(k).$$

În cazul semnalelor imagistice, reconstructia imaginii initiale este definita de relatia,

$$c_0(x,y)=c_p+\sum_{j=1}^{p}\omega_j(x,y),$$

pentru toate pozitiile (x,y) ale imaginii.

Pe baza coeficientilor wavelet calculati, **suportul multirezolutie** este definit prin,

$$M(j,x,y)=\begin{cases}1, & \omega_j(x,y) \text{ este semnificat iv}\\ 0, & \text{altfel}\end{cases}$$

3. Stabilirea nivelului de semnificatie a coeficientilor wavelet

Daca imaginea de intrare I contine si o componenta zgomot h, atunci coeficientii wavelet corespunzatori înglobeaza si ei informatii referitoare la h. În scopul eliminarii zgomotului prezent în coeficientii wavelet asociati imaginii I, este aplicata o procedura de etichetare a fiecarei valori $\omega_j(x,y)$.

Pentru fiecare punct (x,y) din imaginea I, daca se dispune de distributia coeficientilor $\{\omega_j(x,y)\}$, este introdus un test statistic pentru stabilirea semnificatiei fiecarei componente $\omega_j(x,y)$. Fie ipoteza H_0 : I este local constanta la scala de rezolutie j. Daca distributia multimii $\{\omega_j(x,y)\}$ este normala cu medie 0 si deviatie standard s_j, atunci densitatea de probabilitate este,

$$p(\omega_j(x,y))=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_j}\exp\left\{-\frac{(\omega_j(x,y))^2}{2\sigma_j^2}\right\}$$

si respingerea ipotezei H_0 depinde de,

$$P(W)=\Pr ob(\omega_j(x,y)<W)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_j}\int_{-\infty}^{W}\exp\left\{-\frac{t^2}{2\sigma_j^2}\right\}dt,$$ în cazul coeficientilor wavelet pozitivi, respectiv de,

$$P(-W)=\Pr ob(\omega_j(x,y)>W)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_j}\int_{-W}^{\infty}\exp\left\{-\frac{t^2}{2\sigma_j^2}\right\}dt,$$ în cazul coeficientilor wavelet negativi, unde $W>0$.

Fie e un prag dat. Daca $P<e$, ipoteza nula H_0 este exclusa si sunt detectati coeficientii wavelet semnificativi [8].

În cazul zgomotului gaussian stationar, este suficienta compararea valorilor $\omega_j(x,y)$ cu ks_j, k dat (datorita repartitiei normale a zgomotului, este considerat $k\approx 3$). Într-adevar [3],

$$P(|\omega_j(x,y)|\geq k\sigma_j)=P(\omega_j(x,y)\geq k\sigma_j)+P(\omega_j(x,y)<-k\sigma_j)=$$

$$= 2P(\omega_j(x,y) \geq k\sigma_j) =$$
$$= 2(1 - P(\omega_j(x,y) < k\sigma_j)) =$$
$$= 2(1 - P(k\sigma_j))$$
$$P(k\sigma_j) < \varepsilon \Rightarrow P(|\omega_j(x,y)| \geq k\sigma_j) \geq 2(1-\varepsilon)$$

Procedura de stabilire a semnificatiei coeficientilor $\omega_j(x,y)$ este,

$|\omega_j(x,y)| \geq k\sigma_j$ daca si numai daca $\omega_j(x,y)$ este statistic semnificativ.

Etichetarea coeficientilor wavelet conform semnificatiei statistice este realizata, în cazul imaginilor cu zgomot Poisson, pe baza urmatoarei observatii. Daca zgomotul h este distribuit Poisson, transformata *T* a imaginii perturbate *I*, definita prin,

$$T(I(x,y)) = 2\sqrt{I(x,y) + \frac{3}{8}}$$

este o imagine cu zgomot alb $T(\eta)$. În con-tinuare este aplicata procedura de eticheta-re prezentata în cazul modelului de zgomot normal.

3. Tehnica de filtrare utilizând coeficientii semnificativi

Filtrarea pe baza coeficientilor wavelet statistic semnificativi presupune setarea pe 0 a valorilor $\omega_j(x,y)$ nesemnificative, pentru fiecare scala de rezolutie *j* si pozitie (*x*,*y*). Imaginea restaurata $\tilde{I}$ este calculata prin,

$$(3)\ \tilde{I}(x,y) = c_p(x,y) + \sum_{j=1}^{p} g(\sigma_j, \omega_j(x,y))\omega_j(x,y)$$

unde *g* este definita de,

$$g(\sigma_j, \omega_j(x,y)) = \begin{cases} 1, & |\omega_j(x,y)| \geq k\sigma_j \\ 0, & |\omega_j(x,y)| < k\sigma_j \end{cases}$$

3.1. Filtrarea iterativa utilizând coeficientii semnificativi

Aplicarea procedurii de filtrare a imaginii *I* prin relatia (3) determina obtinerea unei erori $E = I - \tilde{I}$ care înglobeaza exclusiv informatiile referitoare la cantitatea de zgomot din *I*. În scopul determinarii informatiilor relative la “structura” zgomotului, poate fi utilizata procedura urmatoare [8].

Pas 1. *n*=0, $I^{(0)}$ imaginea cu toate nivelurile de gri 0

Pas 2. Calculeaza nivelul de semnificatie pentru fiecare scala de rezolutie

Pas 3. Calculeaza $E^{(n)} = I - I^{(n)}$, transformata wavelet a erorii $E^{(n)}$ si determina coeficientii wavelet statistic semnificativi

Pas 4. Reconstruieste $\tilde{E}^{(n)}$, care contine reziduurile statistic semnificative ale imaginii eroare

Pas 5. $I^{(n)} = I^{(n)} + \tilde{E}^{(n)}$

Pas 6. Daca $\left|\frac{\sigma_{E^{(n-1)}} - \sigma_{E^{(n)}}}{\sigma_{E^{(n)}}}\right| > \varepsilon$, atunci *n*=*n*+1 si reia algoritmul de la pasul 3

Iesire: Imaginea $I^{(n)}$ reprezentând rezultatul filtrarii si $E^{(n)} = I - I^{(n)}$ estimatia componentei zgomot.

Observatie La fiecare iteratie, imaginea reziduala este extrasa si introdusa în solutia partiala. Numarul de iteratii este în general cuprins între 6 si 10.

3.2. Filtrarea iterativa utilizând suportul multirezolutie

Algoritmul iterativ de filtrare prezentat în sectiunea precedenta calculeaza imaginea $\tilde{I}$ cu proprietatea ca, pentru toti pixelii imaginii, are loc relatia,

$$|I(x,y) - \tilde{I}(x,y)| < k\sigma_j.$$

În multe aplicatii de interes practic (de exemplu în cazul procesarii imaginilor obtinute din masuratori astronomice) este necesara pastrarea valorilor pixelilor care genereaza coeficienti multirezolutie statistic semnificativi la nivelul fiecarei scale de rezolutie. Criteriul este urmatorul,

(*C*) daca $|\omega_j(x,y)| > K$, *K* suficient de mare, atunci coeficientii corespunzatori imaginii eroare $E^{(n)}$ trebuie sa satisfaca, $\omega_j^{E^{(n)}}(x,y)=0$.

Algoritmul de filtrare utilizând suportul multirezolutie este [8],

Pas 1. *n*=0, $I^{(0)}$ imaginea cu toate nivelurile de gri 0

Pas 2. Calculeaza suportul multirezolutie al imaginii

Pas 3. Calculeaza nivelul de semnificatie pentru fiecare scala de rezolutie

Pas 4. Calculeaza imaginea eroare $E^{(n)}=I-I^{(n)}$, transformata multirezolutie a erorii $E^{(n)}$ si determina coeficientii wavelet pe baza criteriului (*C*)

Pas 5. Reconstruieste $\tilde{E}^{(n)}$, care contine reziduurile semnificative ale imaginii eroare

Pas 6. $I^{(n)}=I^{(n)}+\tilde{E}^{(n)}$

Pas 7. Daca $\left|\frac{\sigma_{E^{(n-1)}}-\sigma_{E^{(n)}}}{\sigma_{E^{(n)}}}\right|>\varepsilon$, atunci *n*=*n*+1 si reia algoritmul de la pasul 3

Iesire: Imaginea $I^{(n)}$ reprezentând rezultatul filtrarii si $E^{(n)}=I-I^{(n)}$ estimatia componentei zgomot.

Observatie Filtrarea dirijata de suportul multirezolutie determina mentinerea zonelor din imagine care, la fiecare scala de rezolutie, contin structuri semnificative.

Bibliografie

[1] Andrews, H., Hunt, B. "*Digital Image Restoration*", Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1977

[2] Cocianu C., State L., Vlamos P., "*On a Certain Class of Algorithms for Noise Removal in Image Processing:A Comparative Study*", Third IEEE Conference on Information Technology ITCC-2002, Las Vegas, Nevada, USA, April 8-10, 2002

[3] Cocianu C., State L., Vlamos P, "*A Comparative Study on the Efficiency of Noise Removal Algorithms*", The Proceedings of 30th ICC&IE 2002, June-July, Tinos Island, Greece

[4] Duda,R.O., Hart,P.E. "*Pattern Classification and Scene Analysis*",Wiley&Sons, 1973

[5] Jain A. K., Kasturi R., Schnuck B. G., "*Machine Vision*", McGraw Hill, 1995

[6] Pitas I., "*Digital Image Processing Algorithms*", Prentice Hall, 1993

[7] Sonka M., Hlavac V., "*Image Processing, Analyses and Machine Visio*",, Chapman & Hall Computing, 1997

[8] Stark J.L., Murtagh F., Bijaoui A., "*Multiresolution Support Applied to Image Filtering and Restoration*", Technical Report, 1995

[9] State L., Cocianu C., Stefanescu V., "*A New Approach of Image Restoration*", The Proceedings of the 27th Conference on Computer&Industrial Engineering, 11-13 oct 2000, Beijing

[10] State L, Cocianu C, Vlamos P.., "*Attempts in Using Statistical Tools for Image Restoration Purposes*", The Proceedings of SCI2001, Orlando, USA, July 22-25, 2001

[11] Umbaugh S., *Computer Vision and Image Processing*, Prentice Hall, 1998

[12] Woods, J.W., Ingle,V.K. "*Kalman Filtering in Two Dimensions:Further Results*", IEEE Trans. Acoustics, Speech Processing, vol. ASSP-29, 1981