Controlul gestiunii stocului

Prof. Rodica MIRONENCO
Liceul Grigore Moisil Bucuresti

În situatii de risc si incertitudine, singura cale este de a formula decizii secventiale, fiecare decizie depinzând de informatii disponibile, dar necunoscute înainte. Un exemplu de programare dinamica stohastica este acela al controlului de gestiune al stocului. Problema de gestiune a stocului îsi propune sa determine cea mai buna politica de stocare a marfii, în efortul de a atinge un echilibru optim între costurile de stocare, comenzi si stocurile epuizate.

Cuvinte cheie: *decizie, stoc, politica, optim, cost.*

Deciziile sunt facute periodic, la începutul perioadelor de lungimi egale; se observa nivelul y al stocului si se decide cantitatea ce va fi comandata x.

Se noteaza cu p_i - probabilitatea ca în perioada urmatoare cererea sa fie de i unitati, unde $i = 1,2,...$

Comenzile în diferite perioade sunt variabile aleatoare independente, cu o distributie de probabilitate identic distribuita. Se presupune ca o comanda neonorata, este reprogramata.

Costul comenzii este suma a k costuri fixe pentru munca de transport, documentare etc. si un cost c – pretul de achizitie/unitate produs, deci k + cx, unde x este cantitatea comandata.

Se presupune ca livrarea comenzii este facuta într-un interval foarte scurt, relativ la lungimea perioadei, astfel încât poate fi neglijat.

Costul de depozitare este proportional cu stocul de la începutul perioadei¸dupa sosirea comenzilor si este notat hy, iar costul de penurie, masurat la sfârsitul unei perioade când este cel mai mare, este 0, când $y \geq 0$ si – gy, pentru y<0.

Daca nivelul stocului este y, apare o penurie de i-y unitati $(i > y)$ cu probabilitatea p_i, iar valoarea asteptata a penuriei este: $\sum_{i=y+1}(i - y)$.

Suma dintre costul de depozitare (stocare) si costul de penurie asteptat depinde de nivelul stocului dupa acceptarea comenzilor si va fi notat:

$$f_y = hy + g\sum_{i=y+1}(i - y)p_i$$

Costul comenzii va fi scris $k\delta(x) + cx$, unde $\delta(x) = \begin{cases} 0, x = 0 \\ 1, x > 0 \end{cases}$, x - marimea comenzii.

În final, costul total asteptat într-o perioada cu un stoc initial y si comanda de marime x, este dat de $k\delta(x) + cx + f_y$

Comenzile dintr-o perioada vor influenta pe cele viitoare si astfel, costurile ce vor apare; ne propunem sa anticipam aceste costuri si sa gasim cea mai buna politica (optima) de minimizare a lor. În aceasta idee, se defineste $\Phi(y)$ - costul minim redus asteptat, numita si functia de "pierdere". La sfârsitul unei perioade, stocul este $y + x - i$ cu probabilitatea p_i, deci o valoare negativa a lui $y + x - i$ reprezinta o penurie.

Consideram suma costurilor în perioada urmatoare plus valoarea redusa a costului viitor asteptat:

$$k\delta(x) + cx + f_{y+x} + \rho\sum_{i=0}^{\infty}\Phi(x + y - i)p_i, \ \rho \text{ - }$$

factor de reducere

Aceste costuri depind de nivelul stocului initial y si de variabila de decizie x – cantitatea comandata.

În conditiile principiului de optimalitate, definim:

$$\Phi(y) = \underset{x \geq 0}{Min}\left[k\delta(x) + cx + f_{x+y} + \rho\sum_{i=0}^{\infty}\Phi(x + y - i)p_i\right] \quad (1)$$

Daca se separa costul variabil al comenzii,

$\Phi(y) = \varphi(y) + c\left(\frac{\rho\mu}{1-\rho} - y\right)$, unde μ-este media comenzii pe o perioada, se obtine din (1):

$$\varphi(y) + \frac{c\rho\mu}{1-\rho} - cy =$$
$$= \underset{x\ge 0}{\mathrm{Min}}\left\{k\delta(x) + cx + f_{x+y} + \rho\sum_{i=0}^{\infty}\varphi(x+y-i)p_i + \frac{c\rho^2\mu}{1-\rho} - \rho c(x+y-\mu)\right\}$$

care se reduce la:

$$\varphi(y) = \underset{x\ge 0}{\mathrm{Min}}\left[k\delta(x) + c(1-\rho)(x+y) + f_{x+y} + \rho\sum_{i=0}^{\infty}\varphi(x+y-i)p_i\right]$$

Redefinim functia cost de stocare si penurie:

$$F_y = f_y + c(1-\rho)y$$

Avem ecuatia simplificata:

$$\varphi(y) = \underset{x\ge 0}{\mathrm{Min}}[k\delta(x) + F_{x+y} + \rho\sum_{i=0}^{\infty}\varphi(x+y-i)p_i] \quad (2)$$

Pentru rezolvarea acestei ecuatii, în vederea determinarii lui *j* , poate fi utilizata metoda iterarii valorilor. Fie aproximarea de ordinul 0:

$\varphi_0(y) = F_y$, iar relatia de recurenta este data de:

$$\varphi_n(y) = \underset{x\ge 0}{\mathrm{Min}}[k\delta(x) + F_{x+y} + \rho\sum_{i=0}^{\infty}\varphi_{n-1}(x+y-i)p_i],$$

secventa de functii convergenta, fiind monotona si marginita; deci $\varphi_\infty(y)$ este unica solutie.

Daca vom face abstractie de costurile k, k = 0, atunci în relatia (2) membrul drept este o functie de x+y. Exista o valoare optima S = x + y, astfel încât:

$$F_S + \rho\sum_{i=0}^{\infty}\varphi(S-i)p_i = \underset{x\ge 0}{\mathrm{Min}}[F_{x+y} + \rho\sum_{i=0}^{\infty}\varphi(x+y-i)p_i]$$

si astfel, comanda optima este x = S - y.

În cazul în care k > 0, o comada x > 0 va fi aleasa, astfel încât, sa refaca nivelul optim x+y=S.

Problema care se pune acum este pentru ce valori y se comanda x > 0 si pentru ce valori ale lui y, avem x = 0. Evident, daca $y \ge S, x = 0$. Exista un nivel critic s, astfel încât, atunci când stocul y depaseste nivelul critic s, nu se face nici o comanda, deci x = 0; când actualul stoc $y \le s$, vom comanda x, astfel încât $x + y$ = S - stocul optimal.

Aceasta politica a fost demonstrata riguros de H. Scarf (1959), ea fiind numita o (s, S) politica.

În aceste conditii relatia (2) devine:

$$\varphi(y) = \begin{cases} F_y + \sum_{i=0}^{y-s}\varphi(y-i)p_i + \rho[k + \varphi(S)]\sum_{i=y-s+1}^{\infty}p_i, y > s \\ F_S + k, y \le s \end{cases} \quad (3)$$

Daca notam: $y = s + x$

$$\varphi(y) = u(y-s) = u(x)$$

$$P_x = \sum_{i=0}^{x} p_i$$

Atunci ecuatia gestiunii stocului devine:

$$u(x) = F_x + [1-P]\rho[k + u(D)] + \rho\sum_{i=0}^{x}u(x-i)p_i, x > 0$$
$$u(x) = k + u(D), x \le 0 \quad (4)$$
$$D = S - s$$

Pentru rezolvarea ecuatiei (4) este folosita functia de generare (transformata z).

Definim functia de generare:

$\sum_{x=0}^{\infty}u(x)z^x = G(z)$, din (4) se obtine:

$$\sum_{x=0}^{\infty}u(x)z^x = \sum_{x=0}^{\infty}F_x z^x + \rho[k+u(D)]\sum_{x=0}^{\infty}[1-P_x]z^x + \rho\sum_{x=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{x}u(x-i)p_i z^x$$

Notam: $x - i = j$ si ultimul termen al sumei din membrul drept se poate scrie:

$$\rho\sum_{x=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{x}u(x-i)z^{x-i}p_i z^i = \rho\sum_{j=0}^{\infty}u(j)z^j\sum_{i=0}^{\infty}p_i z^i$$

Substituind aceasta exprimare, se obtine:

$$\sum_{x=0}^{\infty}u(x)z^x = \sum_{x=0}^{\infty}F_x z^x + \rho[k+u(D)]\sum_{x=0}^{\infty}[1-P_x]z^x + \rho\sum_{i=0}^{\infty}p_i z^i\sum_{x=0}^{\infty}u(x)z^x$$

sau

$$\sum_{x=0}^{\infty}u(x)z^x = \frac{\sum_{x=0}^{\infty}F_x z^x + \rho[k+u(D)]\sum_{x=0}^{\infty}[1-P_x]z^x}{1-\rho\sum_{i=0}^{\infty}p_i z^i} \quad (5)$$

unde

$$\frac{1}{1-\rho\sum_{i=0}^{\infty}p_i z^i} = 1 + \rho\sum_{i=0}^{\infty}p_i z^i + \rho^2\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{i}p_j p_{i-j}z^i + \ldots$$

Atunci:

$$\frac{1}{1-\rho\sum_{i=0}^{\infty}p_i z^i} = \sum_{n=0}^{\infty}\rho^n\sum_{i=0}^{\infty}p_i^{(n)}z^i = \sum_{i=0}^{\infty}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\rho^n p_i^{(n)}\right)z^i$$

$$p_i = p_i^{(1)}, p_i^{(0)} = \begin{cases}1, i = 0\\ 0, i > 0\end{cases}$$

$$\sum_{j=0}^{i}p_j p_{i-j} = p_i^{(2)}$$

Cu aceste exprimari, obtinem din relatia (5):

$$\sum_{x=0}^{\infty} u(x)z^x = \sum_{x=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{x} F_{x-i}\sum_{n=0}^{\infty}\rho^n p_i^{(n)} z^x + \rho[k+u(D)]\sum_{x=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{x}[1-P_{x-i}]\sum_{n=0}^{\infty}\rho^n p_i^{(n)} z^x$$

de aici

$$u(x) = \sum_{i=0}^{\infty} F_{x-i}\sum_{n=0}^{\infty}\rho^n p_i^{(n)} + \rho[k+u(D)]\sum_{i=0}^{x}[1-P_{x-i}]\sum_{n=0}^{\infty}\rho^n p_i^{(n)}$$

Pentru x=D, se obtine:

$$u(D) = \sum_{i=0}^{D}\sum_{n=0}^{\infty} F_{D-i}\rho^n p_i^{(n)} + \rho[k+u(D)]\sum_{i=0}^{D}\sum_{n=0}^{\infty}[1-P_{D-i}]\rho^n p_i^{(n)}$$

Dupa ordonarea termenilor,

$$u(D) = \frac{k\sum_{i=0}^{D}\sum_{n=0}^{\infty}\rho^{n+1} p_i^{(n)}(1-P_{D-i}) + \sum_{i=0}^{D}\sum_{n=0}^{\infty} F_{D-i}\rho^n p_i^{(n)}}{1-\sum_{i=0}^{D}\sum_{n=0}^{\infty}\rho^n p_i^{(n)}(1-P_{D-i})} = \varphi(S) \qquad (6)$$

Dar, comanda are loc înainte sa apara penuria, deci $s \geq 0$.
Astfel, $\varphi(0) = \varphi(S) + k$ si folosind (6), se obtine:

$$\varphi(0) = \frac{k + \sum_{i=0}^{D} F_{D-i}\sum_{n=0}^{\infty}\rho^n p_i^{(n)}}{1-\sum_{i=0}^{D}(1-P_{D-i})\sum_{n=0}^{\infty}\rho^{n+1} p_i^{(n)}},$$

expresie ce se mai poate simplifica folosind urmatoarele notatii:

$$P_D^{(n)} = \sum_{i=0}^{D} p_i^{(n)}$$

probabilitatea ca în n

$$P_D^{(n+1)} = \sum_{i=0}^{D} P_{D-i} p_i^{(n)}$$

perioade sa apara o cerere de produse mai mica sau egala cu D.

$$\varphi(0) = \frac{k + \sum_{i=0}^{D} F_{D-i}\sum_{n=0}^{\infty}\rho^n p_i^{(n)}}{1-\sum_{n=0}^{\infty}\rho^{n+1}[P_D^{(n)} - P_D^{(n+1)}]},$$

de unde prin transformarea numitorului avem:

$$\varphi(0) = \frac{k + \sum_{i=0}^{D} F_{D-i}\sum_{n=0}^{\infty}\rho^n p_i^{(n)}}{(1-\rho)\sum_{n=0}^{\infty}\rho^n P_D^{(n)}} \text{ sau}$$

$$\varphi(0) = \frac{k + \sum_{i=0}^{D} f_{s+D-i}\sum_{n=0}^{\infty}\rho^n p_i^{(n)}}{(1-\rho)\sum_{n=0}^{\infty}\rho^n P_D^{(n)}},$$

care este expresia pentru valoarea prezenta a costurilor la început, când stocurile sunt zero.
Problema a fost redusa la minimizarea acestei expresii, o politica ce are ca parametrii pe s si D.

Bibliografie

1. Beckmann, M., “An Inventory Model for Arbitrary Interval and Quantity Distributions of Demand”, Los Angeles, 1960
2. Tijms, H. C., “Stochastic Modelling and Analysis”, Vrije, Univ. Amsterdam, 1987