Estimatorii de credibilitate omogeni din modelul clasic al lui Bühlmann

Lect.dr. Virginia ATANASIU
Catedra de Matematica, A.S.E. Bucuresti

Acest articol îsi propune sa ilustreze modelul clasic al lui Bühlmann, din perspectiva estimatorilor liniari si omogeni folositi la evaluarea primelor nete de risc pentru contractele portofoliilor de asigurari non-viata. În acest sens, relevam un rezultat important al teoriei credibilitatii, prin care obtinem formule omogene de credibilitate liniara. Utilitatea sa vizeaza situatiile reale, adica implementate în portofolii de asigurari reale si este datorata atât formei liniare-omogene, cât si caracterului nedeplasat, cerinte pe care le impunem acestor estimatori, asigurând astfel conditia esentiala ca suma primelor de credibilitate sa fie egala cu prima globala de la nivelul de vârf.
Cuvint cheie: *credibilitate liniara-omogena, metoda multiplicatorilor lui Lagrange, estimatori nedeplasati.*

Modelul clasic al lui Bühlmann introduce portofoliul de asigurari non-viata, reprezentându-l prin k contracte identice si independente. Fiecare contract j este asimilat cu un vector aleator (q_j, $\underline{X}`_j$), ale carui componente: $q_j$, respectiv $\underline{X}`_j$, au semnificatiile urmatoare:

*q_j denota parametrul aleator de structura pentru polita j, adica variabila aleatoare reala ce descrie caracteristicile riscului implicat de aceasta polita; subliniem faptul ca riscul, luat în consideratie pentru o polita j este o variabila aleatoare nenegativa, care poate fi caracterizata prin aceeasi valoare a parametrului sau de risc q_j de-a lungul anilor de valabilitate ai contractului j;

*$\underline{X}`_j$ indica observatiile efectuate asupra politei j pe durata a t ani; mai precis, $\underline{X}`_j$ este vectorul de componente X_{j1}, X_{j2}, ..., X_{jt}, adica $\underline{X}`_j = (X_{j1}, X_{j2}, ..., X_{jt})$; s-au notat variabilele aleatoare observabile ale contractului j cu X_{j1}, X_{j2}, ..., X_{jt},.

Afirmatia potrivit careia contractele $j=\overline{1,k}$ (reprezentate de cuplurile (q_j, $\underline{X}`_j$), $j=\overline{1,k}$) sunt independente si identic distribuite, revine la presupunerea ca dat fiind $q_j = \theta_j$ variabilele X_{j1}, X_{j2}, ..., X_{jt}, sunt independente si identic distribuite (conditional).

Admitem ca toate contractele au în comun faptul ca mediile si variantele lor sunt exprimate prin aceleasi functii $\mu(\bullet)$ si $\sigma^2(\bullet)$, independente de $r=\overline{1,t}$, dar dependente de parametrul de risc corespunzator; deci:

$$M(X_{jr} \mid ?_j) = m(?_j), \forall r=\overline{1,t} \quad (1),$$

$$Var(X_{jr} \mid ?_j) = s^2(?\ ), \forall r=\overline{1,t} \quad (2).$$

Relatiile (1) si (2) descriu caracteristicile comune ale riscului politei j; mentionam ca egalitatea (1) defineste prima neta de risc a contractului j, daca parametrul de risc al acestuia este q_j.

<u>Teorema 1</u>: (Modelul clasic al lui Bühlmann pentru estimatori de credibilitate omogeni)

În cadrul ipotezelor clasice Bühlmann: (B_1) si (B_2), unde:

(B_1)

$$M(X_{jr} \mid ?_j) = m(?_j), Cov(\underline{X}_j \mid ?_j) = s^2(?_j) I^{(t,)}, j=\overline{1,k}$$

respectiv:

(B_2) Contractele j = 1, ..., k sunt independente, variabilele q_1, ..., q_k sunt identic distribuite, iar observatiile X_{jr}, $j=\overline{1,k}$, $r=\overline{1,t}$ au varianta finita, estimatorul optim (în sensul celor mai mici patrate) liniar-omogen, "nedeplasat" al lui $m(?_j), j=\overline{1,k}$, mai precis, solutia obtinuta prin rezolvarea problemei de minim:

$$\underset{c_j=(c_{jir})_{i,r}}{Min} M\left[\left(m(?_j) - \sum_{i=1}^{k}\sum_{r=1}^{t} c_{jir} X_{ir}\right)^2\right] (3),$$

cu conditia: $M\left(\sum_{i=1}^{k}\sum_{r=1}^{t} c_{jir}X_{ir}\right)=M(m(?_j))$ (4),

este egala cu: $(1-z)M_0 + zM_j$ (5), unde:

$M_j = \overline{X}_j = \frac{1}{t}\sum_{s=1}^{t} X_{js}$ indica estimatorul individual pentru $m(?_j)$ (6),

iar: $M_0 = \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} M_j$ reprezinta estimatorul nedeplasat al lui m (7)

si $z = \frac{at}{s^2 + at}$ este factorul de credibilitate rezultat (8),

cu a, s^2, m definiti la (9).

<u>Demonstratie</u>:

Introducem asa-numitii parametrii structurali ai modelului clasic Bühlmann:

$a = Var[m(?_j)]; s^2 = M[s^2(?_j)]; m = M[m(?_j)]$ (9).

Sa observam ca: $M[m(?_i)] = M(X_{ir}) = m$(10),

astfel încât (4) devine: $\sum_i \sum_r c_{jir} = 1$ (11).

Tinând seama de (11), scriem problema (3) sub urmatoarea forma echivalenta:

$$\underset{c_j}{Min} M\left\{\left[m(?_j) - m - \sum_{i=1}^{k}\sum_{r=1}^{t} c_{jir}(X_{ir} - m)\right]^2\right\} (12)$$

Din relatiile (10), deducem ca putem exprima conditia (4) prin ecuatia:

$$m\left(\sum_{i=1}^{k}\sum_{r=1}^{t} c_{jir} - 1\right) = 0 \qquad (13).$$

Prin urmare, trebuie solutionat extremul (minimul) (11) conditionat de legatura (13). Din acest considerent, aplicam metoda multiplicatorilor lui Lagrange, luând multiplicatorul Lagrange egal cu (-2α/m). Asadar, suntem condusi la rezolvarea problemei de minim:

$$\underset{c_j, a}{Min}\left(M\left\{\left[m(?_j) - m - \sum_{i=1}^{k}\sum_{r=1}^{t} c_{jir}(X_{ir} - m)\right]^2\right\} - 2a\left(\sum_{i=1}^{k}\sum_{r=1}^{t} c_{jir} - 1\right)\right) (14).$$

Impunem ca: $\frac{\partial f}{\partial c_{ji`r`}} = 0, \forall i` = \overline{1,k}, \forall r` = \overline{1,t}$ (15),

unde cu f s-a notat functia care se minimizeaza în (16).

Efectuând calculele de rigoare în (15), obtinem relatiile:

$$a + Cov[m(?_j), X_{i`r`}] = \sum_{i=1}^{k}\sum_{r=1}^{t} c_{jir}Cov(X_{i`r`}, X_{ir}), i` = \overline{1,k}, r` = \overline{1,t} \qquad (16).$$

Daca punem i` = j în (16), atunci rezulta ecuatiile: $a + a = \sum_{r=1}^{t}(a + d_{rr`}s^2)c_{jjr}, r` = \overline{1,t}$

(17).

Într-adevar:

$$Cov[m(?_j), X_{jr`}] = M\{Cov[m(?_j), X_{jr`} \mid ?_j]\} + Cov\{M[m(?_j) \mid ?_j], M[X_{jr`} \mid ?_j]\} =$$

$$\overset{(1)}{=} M\{M[m(?_j)X_{jr`} \mid ?_j] - M[m(?_j) \mid ?_j]M[X_{jr`} \mid ?_j]\} + Cov[m(?_j), m(?_j)] =$$

$$= M[m(?_j)M(X_{jr`} \mid ?_j) - m(?_j)M(X_{jr`} \mid ?_j)] + Var[m(?_j)] \overset{(9)}{=} a; r` = \overline{1,t}$$

$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{r=1}^{t} c_{jir}Cov(X_{jr`}, X_{ir}) = \sum_{r=1}^{t}[c_{jjr}Cov(X_{jr`}, X_{jr}) + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{k} c_{jir}Cov(X_{jr`}, X_{ir})] =$$

$$\overset{(18)}{\underset{(19)}{=}} \sum_{r=1}^{t} c_{jjr}(a + d_{rr`}s^2) + 0 = \sum_{r=1}^{t}(a + d_{rr`}s^2)c_{jjr}; r` = \overline{1,t}$$

unde:

$$Cov(X_{jr`}, X_{jr}) = a + d_{rr`}s^2 \qquad (18),$$

iar:

$$Cov(X_{jr`}, X_{ir}) = 0, \forall i \neq j \qquad (19).$$

Justificarea relatiilor (17) si (18):

$$Cov(X_{jr`}, X_{jr}) = \begin{cases} M[Cov(X_{jr`}, X_{jr} \,|\, ?_j)] + Cov[M(X_{jr`} \,|\, ?_j), M(X_{jr} \,|\, ?_j)], \\ Var(X_{jr`}) = M[Var(X_{jr`} \,|\, ?_j)] + Var[M(X_{jr`} \,|\, ?_j)], \end{cases}$$

$$\begin{cases} daca\, r \neq r` \\ daca\, r = r` \end{cases} = \begin{cases} M[pM(X_{jr`} X_{jr} \,|\, ?_j) - M(X_{jr`} \,|\, ?_j) M(X_{jr} \,|\, ?_j)] + Cov[m(?_j), m(?_j)] \\ M[s^2(?_j)] + Var[m(?_j)] \end{cases}$$

$$\begin{cases} daca\, r \neq r` \\ daca\, r = r` \end{cases} = \begin{cases} M[M(X_{jr`} \,|\, ?_j) M(X_{jr} \,|\, ?_j) - M(X_{jr`} \,|\, ?_j) M(X_{jr} \,|\, ?_j)] + Var[m(?_j)], \\ s^2 + a, \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} a \quad , daca\, r \neq r` \\ s^2 + a, daca\, r = r` \end{cases} = a + d_{rr`} s^2;$$

$$Cov(X_{jr`}, X_{ir}) = M[Cov(X_{jr`}, X_{ir} \,|\, ?_j)] + Cov[M(X_{jr`} \,|\, ?_j), M(X_{ir} \,|\, ?_j)] =$$
$$= M[M(X_{jr`} X_{ir} \,|\, ?_j) - M(X_{jr`} \,|\, ?_j) M(X_{ir} \,|\, ?_j)] + Cov[m(?_j), M(X_{ir})] =$$, deoarece i≠j.
$$= M[M(X_{jr`} \,|\, ?_j) M(X_{ir} \,|\, ?_j) - M(X_{jr`} \,|\, ?_j) M(X_{ir} \,|\, ?_j)] + Cov[m(?_j), m] =$$
$$= 0 + 0 = 0,$$

Reluând sistemul de ecuatii (17), se observa, cu usurinta, ca acesta implica:

$$C_{jj1} = c_{jj2} = ... = c_{jjt} = (\alpha + a)/(s^2 + at) \qquad (20).$$

În cazul i≠j, (16) devine: $a = \sum_{r=1}^{t} (a + d_{rr`} s^2) c_{ji`r}, r` = \overline{1,t}$ (21).

Într-adevar, pentru i`≠j are loc sirul de egalitati:

$$Cov[m(?_j), X_{i`r`}] = M\{Cov[m(?_j), X_{i`r`} \,|\, ?_j]\} +$$
$$+ Cov\{M[m(?_j) \,|\, ?_j], M[X_{i`r`} \,|\, ?_j]\} = M\{M[m(?_j) X_{i`r`} \,|\, ?_j] -$$
$$- M[m(?_j) \,|\, ?_j] M(X_{i`r`} \,|\, ?_j)\} + Cov[m(?_j), M(X_{i`r`})] =$$
$$= M[m(?_j) M(X_{i`r`}) - m(?_j) M(X_{i`r`})] + Cov[m(?_j), m] =$$
$$= 0 + 0 = 0.$$

$$\sum_{i=1}^{k} \sum_{r=1}^{t} c_{jir} Cov(X_{i`r`}, X_{ir}) =$$
$$= \sum_{r=1}^{t} \left[c_{ji`r} Cov(X_{i`r`}, X_{i`r}) + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i`}}^{k} c_{jir} Cov(X_{i`r`}, X_{ir}) \right] \overset{(18)}{\underset{(19)}{=}}$$
$$\overset{(18)}{\underset{(19)}{=}} \sum_{r=1}^{t} [c_{ji`r}(a + d_{rr`} s^2) + 0] = \sum_{r=1}^{t} (a + d_{rr`} s^2) c_{ji`r}.$$

Din (21) obtinem rezolvând în raport cu necunoscutele $c_{ji`r}$, ∀ i`≠j, ∀r, ca:

$c_{jj`1} = c_{jj`2} = ... = c_{jj`t} = \alpha/(s^2 + at)$, ∀i`≠j (22).

Înlocuind coeficientii c_{jir}, $i = \overline{1,k}$, $r = \overline{1,t}$ cu expresiile acestora (vezi (20) si (22)) în (11) deducem urmatoarele:

$$\sum_{r=1}^{t} \left(\frac{\alpha + a}{s^2 + at} + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{k} \frac{\alpha}{s^2 + at} \right) = 1,$$

adica:

$$t \frac{a + a}{s^2 + at} + t(k-1) \frac{a}{s^2 + at} = 1$$

si deci:

$$\frac{\alpha tk}{s^2 + at} = 1 - z \qquad (23).$$

Din relatiile (20), (22) si (23) determinam rezultatul de credibilitate omogen (5). Într-adevar:

$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{r=1}^{t} c_{jir} X_{ir} = \sum_{r=1}^{t}\left(c_{jjr} X_{jr} + \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{k} c_{jir} X_{ir} \right) =$$

$$= \frac{a + a}{s^2 + at}\sum_{r=1}^{t} X_{jr} + \frac{a}{s^2 + at}\sum_{r=1}^{t}\sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{k} X_{ir} =$$

$$= \frac{a}{s^2 + at}\sum_{r=1}^{t}\left(X_{jr} + \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{k} X_{ir} \right) + \frac{at}{s^2 + at}\frac{\sum_{r=1}^{t} X_{jr}}{t} =$$

$$= \frac{atk}{s^2 + at}\frac{\sum_{i=1}^{k}\sum_{r=1}^{t} X_{ir}}{tk} + zM_j =$$

$$= (1 - z)M_0 + zM_j .$$

Prin urmare, demonstratia teoremei este încheiata.

<u>Observatie</u>: Sa remarcam faptul ca, atunci când prima colectiva de risc m se estimeaza prin M_0, suntem condusi la o combinatie liniara omogena a tuturor variabilelor observabile (asa dupa cum atesta rezultatul (5) obtinut în cadrul teoremei, care tocmai a fost stabilita), ce are meritul deosebit, din punct de vedere al practicii asigurarilor, ca ofera un estimator nedeplasat pentru m (vezi conditia (4) si definitia (9)).

Bibliografie

1. **Goovaerts, M.J., Kass, R., Van Heerwaarden, A.E., Bauwelinckx, T.**, ***Insurance Series, volume 3, Efective actuarial methods***, University of Amsterdam, The Netherlands (1990).
2. **Pentikainen, T., Daykin, C.D., Pesonen, M.**, ***Practical Risk Theory for Actuaries***, Universite Pieere et Marie Curie (1990).
3. **Sundt, B.**, ***An Introduction to Non-Life Insurance Mathematics***, Veroffentlichungen de Instituts für Versicherungswissenschaft de Universitat Mannheim Band 28 (1984 VVW Karlsruhe).