Subiectele licentei din februarie 2000, pentru Teoria Riscului si a Incertitudinii

Conf.dr. Laurentiu MODAN
Catedra de Matematica, A.S.E. Bucuresti

La mijlocul lunii februarie 2000, s-a organizat o sesiune de licenta pentru restantierii primelor doua generatii de absolventi ai sectiei de Economie Matematica, a Facultatii de Cibernetica, Statistica si Informatica Economica din Academia de Studii Economice, Bucuresti. Teza de Economia Asigurarilor a cuprins cele trei discipline matematice ce stau la baza meseriei de actuar. Dintre acestea, ***Teoria Riscului si a Incertitudinii****, introdusa întâia oara în programa universitara din România, prin prelegerile pe care le tin din anul academic 1996/1997, a avut alocate 8 subiecte. Date sub forma unor teste grile, le prezentam în cele ce urmeaza.*

1. Fie un proces Poisson generalizat $(X(t))_{t\geq 0}$. Atunci, asimetria sa $g_1(X(t))$:

a (în caz Poisson, depinde proportional de numarul cererilor);

b (în caz Polya, este functie omogena de grad 4, în *n* si *m*);

c $\left(\text{în caz Poisson, are forma } g_1(X(t)) = \dfrac{r_3}{r_2\sqrt{nr_2}} \text{ si în caz Polya, nu este proportionala cu h > 0}\right)$;

d (în caz Poisson, când numarul politelor creste la ∞ , nu prezinta regularitati);

e (în caz Poisson, este direct proportionala cu indicii de risc r_2 si r_3) .

2. Fie o reprezentare a drumurilor aleatoare într-un proces de risc cu timp $t > 1$. Daca reprezentarea se face prin proiectia pe un plan, a doi "dinti de fierastrau", corespunzatori la doua momente diferite, dar succesive, *t*-1 si *t*, atunci, între cele 4 regiuni *A*, *B*, *C*, *D*, determinate, exista urmatoarea relatie valabila:

a $(A + B = j(t))$;

b ($C + D = j(t)$ si $j(t)$ este probabilitatea de ruinare, cel putin la momentul *t*);

c $(A + C = y(t-1))$;

d $(A = y(t))$;

e ($C = \Delta y(t)$ si $y(t)$ este probabilitatea de ruinare la cel putin un moment *t*, din cele aflate în studiu.)

3. Fie r_a si i_a , pentru $a \in M = \{i, g, P, X\}$, factorul, respectiv indicele ce descrie procesul de evaluare a riscului. Atunci, la un moment $t \geq 0$, avem:

a ($i_a \geq 0$ si $i_a = r_a - 1, (\forall) a \in M$);

b $[r_P(t) = r_X(t) \text{ si } r_{igP}(t) = r(t-1, t)]$;

c [ciclajul la t > 1 este $z(t) = i_g(t)$];

d [$(1 + i_P(t))r_g(t)$ nu se poate exprima cu prima de acumulare] ;

e [indicii de risc r_2 si r_3 apar cu ajutorul relatiei $r_x^k = \dfrac{a_k(t)}{a_k(t-1)}$].

4. Prima de reasigurare P_{re} :

a $\left[\text{depinde de o functie oarecare cu argument } s^2(X_{re})\right]$;

b $\left[\text{se evalueaza doar prin } \mathrm{cov}(X_{re}, X_{tot})\right]$;

c $\left[\begin{array}{l}\text{se evalueaza cu o regresie liniara, printr-o relatie de forma}\\ X_{re}\cdot s(X_{tot}) = X_{tot}\left(s(X_{tot}) - s(X)\right)\end{array}\right]$;

d $\left[\begin{array}{l}\text{se aproximeaza doar printr-o functie auxiliara } R(X_{tot}) = M(X|X_{tot}),\\ \text{folosind } \mathrm{cov}(X, X_{tot})\end{array}\right]$;

e $\left[\begin{array}{l}\text{se evalueaza printr-o functie descrescatoare în } \mathrm{cov}(X_{re}, X_{tot}) \text{, sau}\\ \text{crescatoare în } s^2(X_{tot})\end{array}\right]$.

5. Într-o asigurare de bunuri, variabila aleatoare a valorii cererilor totale este modelata printr-un proces Poisson generalizat, în caz Polya, având generatoarea de momente $G_{X(t)}(1) = 2$. Fiecare cerere individuala este data prin variabila aleatoare $Z:\begin{pmatrix} n \\ pq^{n-1}\end{pmatrix}, n\in \boldsymbol{N}^*, p, q \in \boldsymbol{R}_+$, $p + q = 1, eq < 1$. Stiind ca exista 50 cereri, atunci, parametrul h al procesului si prima P de risc sunt:

a $\left(h = \frac{50}{9}\frac{e+1}{q+1}, P = \frac{15}{p}\right)$; b $\left(h = \frac{e-1}{1+eq}, P = \frac{1}{5p}\right)$; c $\left(h = \frac{50}{9}\frac{e}{1-eq}, P = \frac{5}{p}\right)$;

d $\left(h \in (1,2), P = \frac{50}{p}\right)$; e $\left(h = \frac{e+1}{p}, P = \frac{q}{p}\right)$.

6. Într-un proces de risc ce actioneaza pe un an, functia caracteristica a variabilei aleatoare a valorii cererii totale $X(t)$, este $j_X(t) = \frac{1}{1+t^2}$. De-a lungul anului, au existat 400 cereri, iar probabilitatea, presupusa pentru ruinare, a fost $e = 0{,}01\,(y_e = 2{,}32)$. Pentru anul ce urmeaza, societatea de asigurare doreste sa impuna si o prima *B*, de acumulare. Atunci, rezerva de risc *U*, coeficientul *c* de cheltuieli si cel de acumulare l_B sunt:

a $(U = 3{,}27 \text{ si } c + l_B = 1)$; b $\left(U = 2{,}97 \text{ si } c + l_B = \frac{1}{2}\right)$; c $(U = 3 \text{ si } c - l_B = 1)$;

d $\left(U = 3{,}27 \text{ si } l_B - c = \frac{1}{2}\right)$; e $(U = 2{,}57 \text{ si } c = l_B)$.

7. Daca marimea cererii totale $(X(t))_{t\geq 0}$ este exprimata printr-un proces Poisson(2), atunci $s_X(1{,}100)$ este:

a (10005); b (10000); c (9997); d (101); e $(100{,}5)$.

8. Fie un proces Poisson generalizat, cu $(X(t))_{t\geq 0}$ variabila aleatoare a marimii cererilor, si cu $r(t) = \frac{s(X(t))}{P(t)}$, riscul mediu relativ, când $P(t)$ este prima uzuala de risc. Daca se actioneaza pe un an, atunci:

a $\left[r_{\min} \text{ apare când } r_2 = 1 \text{, în cazul a } n \text{ cereri}\right]$;

b $\left[r_{\min} \text{ apare când } r_3 = 1 \text{, în cazul a } n \text{ cereri}\right]$;

c $\left[r_{\min} \text{ depinde liniar de } n \text{, în cazul Poisson}\right]$;

d $\left[r \text{ depinde liniar de rezerva de risc, daca } X(t) \in N(m, s)\right]$;

e $\left\{ r \right.$ nu depinde de încarcare, daca $X(t) \in N(m,s)\}$.

Grila raspunsurilor corecte este:

1	2	3	4	5	6	7	8
c	e	e	c	d	a	b	a

Vom discuta în continuare, cele 8 subiecte propuse la licenta din februarie 2000.

1. La un proces Poisson generalizat, de valori ale cererilor $(X(t))_{t\geq 0}$, asimetria în functie de indicii de risc r_2 si r_3 (invariabili la inflatie), si de numarul n al cererilor, este:

$$g_1(X(t)) = \frac{\frac{r_3}{n^2} + 3\frac{r_2}{n} s^2(Q(t)) + g_1(Q(t)) \cdot s^3(Q(t))}{\left[\frac{r_2}{n} + s^2(Q(t))\right]^{3/2}},$$

unde $g_1(Q(t))$ reprezinta asimetria, iar $s^2(Q(t))$ dispersia factorului perturbator $Q(t)$, la $t \geq 0$. În caz Poisson, cum $s^2(Q(t)) = 0$, rezulta ca: $g_1(X(t)) = \frac{r_3}{r_2\sqrt{nr_2}}$,

iar în caz Polya, cum $s^2(Q(t)) = 1/h$, înseamna ca: $g_1(X(t)) = \frac{nh^2 a_3 + 3n^2 mha_2 + 2n^3 m^3}{\sqrt{n}}$,

unde $m = a_1$, care împreuna cu a_2 si a_3 desemneaza momentele simple ale variabilei aleatoare a unei valori a cererii individuale, ce intra în componenta lui $X(t)$. Aceasta ultima expresie ne arata ca nu avem proportionalitate cu h.

2. Vom considera *Figura 1*, raportata la un sistem de axe $u(t)Of_u$, pe abscisa fiind data variatia solvabilitatii $u(t)$, ce depinde de timpul $t \geq 0$, iar pe ordonata Of_u , fiind exprimata densitatea f_u a aceleiasi solvabilitati. Cele doua curbe, w_t si g_t reprezinta doua densitati, la momentele succesive, t-1, respectiv t, iar u_r este bariera de ruinare. Folosim probabilitatile curente:

i) $j(t)$, a starii de ruinare, intervenite exact la momentul $t > 1$;

ii) $y(t)$, de ruinare într-unul din momentele 1,2,…,t, pe care le parcurge procesul de risc la timp $t > 1$.

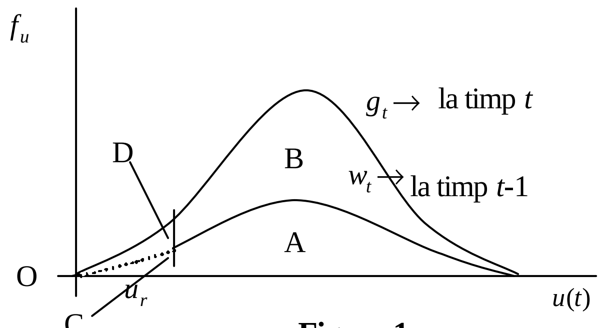

Figura 1

Stiind ca $A + C = 1 - y(t-1)$ si $A = 1 - y(t)$, gasim: $C = (A + C) - A = y(t) - y(t-1) = \Delta y(t)$.

3. Indicii de risc r_2 si r_3 sunt în fond fac-tori, sau randamente pozitive de risc, independente fata de inflatie, si care apar în urma iterarii relatiei: $a_k(t) = r_X{}^k(t) a_k(t-1)$, care exprima legatura între momentele de ordin k, la timpi succesivi.

4. Primele de reasigurare P_{re} sunt obliga-torii în situatia în care valoarea bunurilor asigurate sau a sumelor împrumutate este foarte mare, sau când puterea financiara a societatii de asigurare este medie. Ele se definesc prin relatia: $P_{re} = M(X_{re}) + f(s^2(X_{re}))$, unde X_{re} este valoarea cererii acoperite o-bligatoriu de reasigurator, iar f, o functie crescatoare, numita de încarcare.

Tinând cont ca X_{tot} este valoarea totala a cererii si ca X este partea acesteia, aco-perita de cel ce asigura sau împrumutata initial, avem: $X_{tot} = X + X_{re}$.

Evaluând dispersia: $s^2(X_{re}) = s^2(X_{tot} - X)$ si folosind apoi coeficientul de corelatie: $r(X_{tot}, X) = \dfrac{\mathrm{cov}(X_{tot}, X)}{s(X_{tot}) \cdot s(X)}$, gasim:

$$X_{re} \cdot s(X_{tot}) = X_{tot}(s(X_{tot}) - s(X)),$$

relatie din care se poate calcula prima P_{re} , într-un mod mult mai convenabil decât a-cela în care a fost introdusa, prin functia crescatoare f, a platilor reasigurarii.

5. Generatoarea de momente a unui proces Poisson generalizat, în caz Polya este: $G_{X(t)}(s) = \left[1 - \frac{n}{h}(G_z(s) - 1)\right]^{-h}, h \in \mathbf{N}$, unde $G_{z(t)}(s)$ reprezinta generatoarea de mo-mente a variabilei aleatoare a valorii unei singure cereri individuale, date prin:

$$G_{z(t)}(s) = \sum_{n\geq 1} e^{sn} pq^{n-1} = \frac{p}{q} \sum_{n\geq 1} (e^s q)^n = \frac{p}{q} \cdot \frac{e^s q}{1 - e^s q},$$

când $e^s q < 1$, sau echivalent, când $s < -\ln q$.

Ecuatia $G_{X(t)}(1) = 2$ revine la:

$$2\left[1 - \frac{50}{h}\left(\frac{ep}{1 - eq} - 1\right)\right]^h = 1.$$

Notând cu $u(h) = 2\left[1 - \frac{50}{h}\left(\frac{ep}{1 - eq} - 1\right)\right]^h - 1$, constatam ca $u(1) < 0$ si $u(2) > 0$, deci, ecu-atia anterioara admite solutia $h \in (1, 2)$. Prima P, de risc, poate fi evaluta în doua moduri:

i) $P = b_1 = G'_{X(t)}(s) = \dfrac{50}{p}$;

ii) $P = mn = 50M(Z(t)) = 50\sum_{n\geq 1} npq^{n-1} = 50p\sum_{n\geq 1} \left(q^n\right)'_q = 50 \cdot \dfrac{p}{(1-q)^2} = \dfrac{50}{p}$.

6. Vom folosi ecuatia de baza a rezervei de risc pe un an:

$$U = y_e s(X(t)) + \frac{y_e^2 - 1}{6} s(X(t)) g_1(X(t)) - lP,$$

si calculul momentelor, cu ajutorul functiei caracteristice, exprimat prin: $a_n = \dfrac{j^{(n)}(0)}{i^n}$.

Observând ca $a_1 = 0$, $a_2 = 2$ si $a_3 = 0$, înseamna ca $s^2(X(t)) = 2$, $g_1(X(t)) = m_3(X(t)) = 0$, iar $U = y_e s(X(t)) = 3{,}27$, pentru ca $P = a_1 = 0$.

Pe de alta parte, relatia între prima B, de acumulare, si prima P, de risc, este: $P = (1 - c - l_B)B$, ceea ce revine la: $(1 - c - l_B)B = 0$, sau la : $c + l_B = 1$, când $B \neq 0$.

7. Vom calcula dispersia între timpii t_1 si t_2 , cu:

$$s^2(t_1, t_2) = \sum_{t=t_1}^{t_2} s^2(K(t)) + 2 \sum_{t_1 \leq i < j \leq t_2} \mathrm{cov}(K(t_i), K(t_j)),$$

când $t_2 > t_1$. Tinând cont de covarianta unui proces simplu, Poisson (l), data prin: $\mathrm{cov}(K(s), K(s+t)) = ls$, pentru doua mo-mente s si $s+t$, absolut succesive, gasim:

$$s^2(1{,}100) = \sum_{t=1}^{100} 2t + 2C_{100}^2 \sum_{s=1}^{100} 2s = 2 \cdot \frac{100 \cdot 101}{2}\left[1 + 2 \cdot \frac{100 \cdot 99}{2}\right] = 100 \cdot 101 \cdot 99001,$$

pentru ca dispersia unui proces Poisson (l) este: $s^{2} = l$. De aici, constatam ca $s(1,100) \cong 10000$.

8. Cu ajutorul dispersiei procesului Poisson generalizat: $s^{2}(X(t)) = na_2 + n^2 m^2 s^{2}(Q(t))$, deducem ca: $r(t) = \sqrt{\frac{r_2}{n} + s^{2}(Q(t))}$, la un portofoliu de n polite, cu factorul pertur-bator $Q(t), t \geq 0$. Când $r_2 = 1$, în mod evi-dent avem: $\sqrt{\frac{r_2}{n} + s^{2}(Q(t))} \geq \sqrt{\frac{1}{n} + s^{2}(Q(t))}$,

pentru ca aceasta, revine la:

$$r_2 \geq 1 \Leftrightarrow \frac{a_2}{a_1^{2}} \geq 1 \Leftrightarrow a_2 - a_1^{2} \geq 0 \Leftrightarrow s^{2} \geq 0 .$$

Observatie. Situatia expusa a presupus un portofoliu de n polite finite. Evident, când $n \to \infty$, $r_{\min} = s(Q(t))$.

Erata: În articolul "*Teoria Riscului si a Incertitudinii, la licenta din mai 1999, specializarea Economie Matematica*", apa-rut în v.3, nr.11, 1999, la pagina 81, a aceleiasi reviste, în chestiunea **1**, dupa prima aparitie a probabilitatii $p_k(nq)$ se va adauga $q \neq 1$. Fara aceasta conditie, solutia ar trebui sa contina atât pe a) cât si pe b).