

## Teoria riscului si a incertitudinii la licenta din mai 1999, specializarea Economie Matematica

Lect.dr. Laurentiu MODAN  
Catedra de Matematica, A.S.E. Bucuresti

*În anul 1999, la Facultatea de Cibernetica, Statistica si Informatica Economica din A.S.E. Bucuresti, au terminat cursurile studentii celei de a doua promotii a sectiei de Economie Matematica, unica de acest gen în peisajul învățământului universitar românesc. Printr-o mai puțin inspirata schimbare venita din partea Ministerului Educatiei Nationale, dar în detrimentul specializarii ce-i ofera absolventului baza activitatii sale viitoare, licenta din mai 1999 a fost constituita doar din doua teze: Teorie Economica si Economia Asigurarilor. Disciplinele matematice, ce reprezinta majoritatea cursurilor noii specializari, s-au regasit în cea de-a doua teza. Prezentam în continuare, cele 8 subiecte grila, din capitolele cursului **Teoria Riscului si a Incertitudinii**, pe care lam tinut pentru prima data în Romania, începând cu anul universitar 1996/1997.*

1. Fie  $(X(t))_{t \geq 0}$ , cererile unui proces Pois-son compus-mixat. Atunci, pentru probabilitatea neconditionata  $\bar{p}_k(n)$  si pentru cea conditionata  $p_k(nq)$ , este adevarata relatia:

a) atât în caz Polya, cât si în caz Poisson,  $\bar{p}_k(n) = M(p_k(nq))$ ;

b) în caz Polya, exista probabilitatile  $p, q$  ce depind de  $h > 0$  si  $n \in \mathbb{N}^*$ , astfel ca  $\bar{p}_k(n) = C_{k+h-1}^k \cdot p^h q^k$ ;

c) în caz Polya,  $\bar{p}_k(n)$  si  $p_k(nq)$  urmeaza legi binomiale;

d) atât în caz Polya, cât si în caz Poisson,  $\lim_{h \rightarrow \infty} \bar{p}_k(n)$  nu are sens;

e) în caz Polya,  $\bar{p}_k(n)$  nu admite exprimari recurentente.

2. Rezerva  $U$ , de risc, pe 1 an:

a) depinde liniar de probabilitatea de supravietuire;

b) are margini ce nu depind de momentul de reasigurare  $a_j(M)$ ;

c) în cazul oricarei retentii  $M$ , de reasigurare, are marginea superioara dependenta parabolic de  $y_e$ , prin

$$M \left[ y_e + \frac{g(X(t))}{6} (y_e^2 - 1) \right];$$

d) pentru unele retentii  $M$ , de reasigurare, are marginea superioara:

$$M \left[ y_e - \frac{g(X(t))}{6} (y_e^2 - 1) \right] - IP;$$

e) la fuzionarea mai multor companii, creste.

3. Fie variabila aleatoare  $(X(t))_{t \geq 0}$  a valorii cererilor unui proces de risc, cu densitatea de repartitie  $f_X(x) = \frac{k}{2} x e^{-x}$ ,  $x \geq 0$ . Daca  $a_j$  si

$F_X$  sunt momentele de ordin  $j$ , respectiv repartitia lui  $X$ , iar  $N$  este repartitia unei variabile aleatoare  $N(0,1)$ , atunci:

a)  $k = 1/2$ ,  $P = 2$ ;

b)  $F_X$  nu admite aproximare Edgeworth;

c)  $F_X$  admite aproximare Edgeworth,  $F_X(x) = 2(1 - e^{-x} - x e^{-x})$  si derivata

$$N'\left(\frac{x - na_1}{\sqrt{na_2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2p}} e^{-\frac{(x-2n)^2}{12n}};$$

d)  $k = 1/4$  si  $F_X$  admite aproximare Edgeworth;

e)  $k=2, P=4, N'\left(\frac{x - na_1}{\sqrt{na_2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2p}} e^{-(x-4n)^2}.$

4. Într-un proces de risc cu timpul  $t > 1$ , solvabilitatea  $u$ :

a) contine o rezerva ideala si doi termeni care sunt obligatoriu stochastici, în toate ipotezele de lucru;

b) are o medie ce nu contine factorizari explicite, datorate lui  $r_X$  si  $r_P$ ;

c) are limita mediei sale, la  $t \rightarrow \infty$ , invers proportionala cu  $1 - r_{ipp}$ ;

d) are media exprimabila printr-o suma de 2 termeni, doar când nu exista inflatie;

e) are media neinfluentata de factorii me-diului economic, în timp ce dispersia sa es-te influentata de acestia.

5. Fie un proces de risc oarecare, cu timp  $t \geq 0$ . Atunci:

a) prima  $G(t)$ , de bonificare, apare obligatoriu la  $t > 1$ ;

b)  $G(t) = k[(1 + l)P(t) - X(t)]$  pentru  $k > 0$ ,  $l > 0$  si  $P_l(t) = (1 - kl)G(t)$ , când  $P_l(t)$  este prima de încarcare;

c)  $P_l(t) = (1 + l)P(t)$ , când  $P(t)$  este prima de risc, ca variabila aleatoare asociata cererilor  $X(t)$ ;

d) prima de acumulare  $B(t)$  este aceea înscrisa în contractul asigurat-asigurator, fi-înd data de  $B(t) = \frac{P(t)}{1 - c - l_B}$ , când  $c > 0$ ,

$l_B > 0$  si  $1 \neq c + l_B$ ;

e)  $P_l(t) = (1 - c)B(t)$  si  $l_B \neq \frac{l}{1 + l} \cdot \frac{P_l(t)}{B(t)}.$

6. Fie un proces de risc cu reasigurare. Dacă pentru suma reasigurata,  $M = 2u.m.$ , momentul  $a_1(M) = 1$ , iar  $S(z) \in \exp(2l)$ , când  $l > 0$ , atunci:

a)  $l \in (\ln \sqrt[4]{2}, 1)$ ;

b)  $l \in (1/2, 1)$ ;

c)  $l \in (1/3, \ln \sqrt[4]{2})$ ;

d)  $l \in \left(2, \frac{1}{\ln \sqrt[4]{2}}\right)$ ;

e)  $l \in (1/3, 2)$ .

7. Într-un proces de asigurare a bunurilor, se cunoaste ca repartitia valorii cererilor individuale este  $S(x) = F^{2*}(x) \frac{x}{1+x}$ , unde

$F^{n*}$  exprima repartitia variabilei aleatoare  $\sum_{k=1}^n V_k$ , când  $(V_k)_{k=1, n}$  sunt independente si identic repartizate, cu:

$$V: \begin{pmatrix} 1/2 & 1 & 2 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \end{pmatrix}.$$

Societatea se reasigura cu o retentie  $M < 3/2$ .

Dacă  $a_2(M) = M^2 - \frac{1}{8} \ln(1 + M)$ , stiînd ca  $\ln 2 = 0,69$  si  $\ln 5 = 1,6$ , atunci:

a)  $M = 1$  si  $M = 13/10$ ;

b)  $M = 1/2$  si  $M \in (1/10, 1/5)$ ;

c)  $M = 1/10$ ;

d)  $M \in (1/3, 1/2)$ ;

e) nu exista valori acceptabile pentru  $M$ .

8. O societate de asigurare ofera familiei, la decesul unui membru, fie 1000 u.m., fie 2000 u.m. Asigurarea se face pe un an, printr-un proces în caz Poisson, cu  $X(t) \in N(m, s)$ . Dacă probabilitatea de rui-nare este  $e = 0,01 (y_e = 2,32)$ , dacă încar-carea este  $1/5$  si exista 100 polite, atunci, maximul rezervei de risc, în sute, este:

a) 56; b) 68; c) 59; d) 69; e) 63.

Grila raspunsurilor corecte este:

|   |   |   |   |
|---|---|---|---|
| 1 | b | 5 | d |
| 2 | c | 6 | a |
| 3 | c | 7 | e |
| 4 | c | 8 | b |

În cele ce urmeaza, vom da câteva indicații pentru rezolvarea celor 8 subiecte.

1. Într-un proces Poisson compus-mixat, pentru variabilele aleatoare  $K(t)$  și  $Q(t)$  ale numărului de cereri, respectiv ale funcției de structura, la timpul  $t \geq 0$ , când  $k, n \in \mathbb{N}$  și  $q > 0$ , se definește probabilitatea necondiționată:

$$\bar{p}_k(n) = P(K(t) = k),$$

precum și probabilitatea condiționată:

$$p_k(nq) = P(K(t) = k | Q(t) \leq q).$$

În cazul Polya, când repartiția  $H$ , a lui  $Q(t)$ , este o funcție  $\Gamma$  incompletă, de forma:

$$H(q) = \Gamma(hq, h) = \frac{1}{\Gamma(h)} \int_0^{hq} e^{-t} t^{h-1} dt,$$

se poate arata că există probabilitățile:

$$p(h) = \frac{h}{n+h}, \quad p(h) = \frac{n}{n+h},$$

astfel încât:

$$\bar{p}_k(n) = C_{h+k-1}^k \cdot p^h q^k.$$

2. Se pleacă de la ecuația rezervei  $U$ , de risc, la timp  $t \leq 1$  și având coeficientul de încărcare  $l > 0$ :

$$U = y_e s(X) + \frac{y_e^2 - 1}{6} g(X) s(X) - lP, \quad y_e \geq 1,$$

unde  $U$ ,  $X$  și  $P$  sunt dependente de  $t$ ,  $(X(t))_{t \geq 0}$  reprezintă variabila aleatoare a valorii cererii totale,  $P(t)$  fiind prima de risc, iar  $y_e$ , soluția ecuației:

$$e = 1 - F(y_e),$$

$e$  desemnând probabilitatea de ruinare, definită prin:

$$e = P(\{U < U_r\}),$$

pentru pragul de ruinare  $U_r$ .

Dacă  $M > 0$  este valoarea impusă de reasigurare, pentru  $U$  se poate găsi următoarea margine superioară:

$$U < M \left[ y_e + \frac{y_e^2 - 1}{6} g(X) \right] - lP,$$

care depinde parabolic de  $y_e$ .

3. Pentru ca  $f_X$  să fie densitate de repartiție, se impune ca:

$$\int_0^\infty \frac{k}{2} x e^{-x} dx = 1, \text{ deci } k = 2.$$

Atunci, repartiția este:

$$F_X(x) = \int_0^x f(t) dt = 1 - e^{-x} - x e^{-x}.$$

Aproximarea Edgeworth există doar când momentele  $a_i, (\forall) i \in \{1, 2, 3, 4\}$  sunt finite.

Observăm că:

$$a_i = \int_0^\infty x^i \cdot x \cdot e^{-x} dx = \int_0^\infty x^{i+1} e^{-x} dx = (i+1)!,$$

$(\forall) i \in \{1, 2, 3, 4\}$  ceea ce ne asigură că repartiția lui  $X$  ar putea fi calculată și cu ajutorul aproximării Edgeworth.

Se cunoaște că:  $N'(x) = \frac{1}{\sqrt{2p}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ , deci,

$$N'\left(\frac{x - na_1}{\sqrt{na_2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2p}} e^{-\frac{(x - na_1)^2}{2na_2}}, \text{ ceea ce revine la:}$$

$$N'\left(\frac{x - na_1}{\sqrt{na_2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2p}} e^{-\frac{(x - 2n)^2}{12n}}.$$

4. Ecuația solvabilității  $u$ , dependentă de timp, într-un proces de risc, evaluat pe mai mulți ani ( $t > 1$ ) este:  $u(t) = R(t) - f(1, t)$ , unde  $R(t)$  reprezintă limita ideală a rezervei de risc, atinsă doar când nu există cereri, iar

$f(1, t)$  este cererea relativa, cumulata de la 1 la  $t$ .

Media solvabilitatii apare ca urmare a lui  $f(1, t)$ , ca parte stochastica a cererilor. Ea are forma:

$$m_u(t) = M(u(t)) = u(0)r(0, t) + l \sum_{t=1}^t r(t, t) + (1 - c - l_B) \cdot \sum_{t=1}^t [1 - (1 + z(t))D(t)] r(t, t),$$

unde  $u(0)$  este solvabilitatea la

$t = 0$ ,  $r(0, t) = \prod_{t=1}^t r_{igp}(0, t)$  este randamentul (raportul) impus de profit ( $i$ ), de cresterile volumetrice ( $g$ ), precum si de inflatie ( $P$ ), aparuta prin intermediul primei de risc  $P(t)$ , iar  $l, l_B$  si  $c$  sunt factorii de încar-care, corespunzatori lui  $P(t)$ , primei de acu-mulare  $B(t)$  si respectiv cheltuielilor rela-tive, în timp ce  $z(t)$  reprezinta ciclajul pe termen lung ( $t > 1$ ), iar

$$D(t) = \frac{\prod_{j=1}^t r_X(j)}{\prod_{j=1}^t r_P(j)}$$

este functia auxiliara ce

arata efectul ramânerii în urma, între ce-rerile  $X(t)$  si primele  $P(t)$  (dependente de timpul  $t$ ). Când  $r_{igp}(t) < 1$ ,  $m_u(t)$  are o oscilatie în ju-rul unui nivel de echilbru, ce apare pentru  $z(t) = 0$ , ceea ce impune lipsa cresterii prin inflatie,  $r_X(t)$ , deci si lipsa cresterii prin prima,  $r_P(t)$ , adica  $D(t) = 1$ . Daca se presupune si stationaritatea :

$$r_{igp}(t, t) = r_{igp}(t) = r_{igp}, (\forall) t \geq 1,$$

trecând la limita, se obtine:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} m_u(t) = \frac{l}{1 - r_{igp}} = E_u,$$

ceea ce arata ca la  $\infty$ , media solvabilitatii se stabilizeaza catre valoarea  $E_u$ .

5. Prima înscrisa în contractul dintre asigu-rator si asigurat este cea de acumulare, notata  $B(t)$  si nu aceea de risc,  $P(t)$ . Cu ajutorul factorului de încarcare  $l_B > 0$ , corespunzator lui  $B(t)$ , dar si al celui de cheltuieli  $c \in (0, 1)$ , exista relatia:

$$P(t) = (1 - c - l_B)B(t), \quad c + l_B \neq 1.$$

6. Cum  $S(z) \in \exp(2l)$ , înseamna ca  $S(z) = 1 - e^{-2lz}$ , ( $\forall$ )  $z > 0$  si  $l > 0$ . Se cu-noaste ca:

$$a_1(M) = \int_0^M z dS(z) + M(1 - S(M)),$$

ceea ce în situatia problemei, revine la:

$$1 = \int_0^M 2lze^{-2lz} dz + Me^{-2lM},$$

sau echivalent:  $e^{-2lM} + 2l - 1 = 0$ .

Studiem solutiile ecuatiei anterioare, când  $M = 2$  u.m., cu ajutorul toremei Rolle. Notam:

$$f(l) = e^{-4l} + 2l - 1, \text{ deci:}$$

$$f'(l) = -4e^{-4l} + 2,$$

ecuatia  $f'(l) = 0$ , având radacina  $l = \frac{\ln 2}{4}$ .

Obseram ca  $f\left(\frac{\ln 2}{4}\right) = \frac{1}{e^{\ln 2}} + \frac{\ln 2}{2} - 1 =$

$$\frac{\ln 2}{2} - \frac{1}{2} < 0, \text{ si ca } f(1) = \frac{1}{e^4 + 1} > 0.$$

Atunci, înseamna ca  $l \in (\ln \sqrt[4]{2}, 1)$ .

7. Rezulta evident ca:

$$V + V = \begin{pmatrix} 1 & 3/2 & 2 & 5/2 & 3 & 4 \\ 1/16 & 1/4 & 1/4 & 1/8 & 1/4 & 1/16 \end{pmatrix}$$

deci repartitia  $S(x)$  este de forma:

$$S(x) = \begin{cases} 0 & , 0 \leq x < 1 \\ \frac{x}{16(1+x)} & , x \in \left[1, \frac{3}{2}\right) \\ \frac{5x}{16(1+x)} & , x \in \left[\frac{3}{2}, 2\right) \\ \frac{9x}{16(1+x)} & , x \in \left[2, \frac{5}{2}\right) \\ \frac{11x}{16(1+x)} & , x \in \left[\frac{5}{2}, 3\right) \\ \frac{15x}{16(1+x)} & , x \in [3, 4) \\ \frac{x}{1+x} & , x \geq 4 \end{cases}$$

Momentul de ordin 2, în cazul unei reasigurari, se calculează din relația:

$$a_2(M) = \int_0^M x^2 dS(x) + M^2(1 - S(M)).$$

i) Presupunând ca  $x \in [0, 1]$ , atunci:

$a_2(M) = M^2$  și ținând cont de ipoteza, rezulta ecuația:  $M^2 = M^2 - \frac{1}{8} \ln(1+M)$ ,

cu soluția inacceptabilă,  $M = 0$ .

ii) Presupunând ca  $x \in \left[1, \frac{3}{2}\right)$ , atunci :

$$a_2(M) = \frac{1}{16} \int_0^M \frac{x^2}{(1+x)^2} dz + M^2 \left[1 - \frac{M}{16(1+M)}\right]$$

sau echivalent:

$$a_2(M) = \frac{1}{16} \left[ M - \frac{1}{1+M} + 1 - 2 \ln(1+M) \right] + M^2 \left[ 1 - \frac{M}{16(1+M)} \right].$$

Ținând cont de ipoteza, rezulta ecuația:

$$\frac{1}{16} \left[ M - 2 \ln(M+1) - \frac{1}{M+1} + 1 \right] + M^2 - \frac{M^3}{16(1+M)} = M^2 - \frac{1}{8} \ln(M+1),$$

cu soluțiile inacceptabile  $M = -1, M = 2$ .

Prin urmare, cele două cazuri studiate ne asigură ca nu există valori acceptabile pentru retenția  $M < 3/2$ .

8. Asociind 1 la 1000 u.m. și presupunând ca probabilitatea de oferta a acestei sume, către familia decedatului, este  $p \in [0, 1]$ , vom considera următoarea variabilă aleatoare:

$$X(t): \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ p & 1-p \end{pmatrix},$$

cu momentele  $a_1(X(t)) = 2 - p$  și  $a_2(X(t)) = 4 - 3p$ .

Pentru ca  $X(t) \in N(m, s)$ , iar procesul de modelare este în cazul Poisson ( $s(X(t)) = 0$ ), ecuația rezervei de risc la  $t \leq 1$  devine:

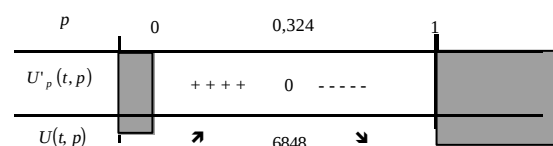
$$U(t) = y_e s(X(t)) - lP(t), \text{ unde } s(X(t)) = \sqrt{na_2}.$$

Astfel:

$$U(t, p) = 23,2\sqrt{4-3p} - 20(2-p),$$

$$U'_p(t, p) = 20 - \frac{34,8}{\sqrt{4-3p}}, \text{ cu soluția } p = 0,324.$$

Tabelul de variație a rezervei de risc  $U(t, p)$ , ca funcție dependentă de  $p$ , este următorul:



El ne arată că maximumul rezervei de risc este  $U(0,324) = 6848$  u.m..